

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	CONTRÔLE	Date : 09/10/2021
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES		
Niveau : PC	Durée : 3 heures	Coefficient: 6

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,5 POINTS)

Exercice 1: (5,5 points)

1) Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes : (0,75pt x 3)

a) $x^2 - (2 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} = 0$; b) $\sqrt{4x + 3} \geq 2x + 1$; c) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} > \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}$.

2) Soit (E) l'équation : $2x^4 - 21x^3 + 14x^2 - 21x + 2 = 0$.

a) Démontrer que (E) est équivalente à : $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$. (0,5pt)

b) En déduire par changement de variable, les solutions de (E) dans IR. (0,75pt)

3) On donne $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$.

a) Montrer que : $\frac{f(x)}{x^2} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 20$. (0,5pt)

b) Déterminer les racines du polynôme $g(x) = 2x^2 - 13x + 20$. (0,5pt)

c) Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$. (1pt)

Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan affine est rapporté à un repère (O, I, J) . On considère les points $A(2; -3)$ $B(1; -2)$ et $C(3; -2)$ et les cercles (C) et (C') d'équations respectives:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 6x + 8y + 23 = 0.$$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de (C) et (C'). (1pt)

2) Montrer que (C) est l'image de (C') par la symétrie de centre A. (0,75pt)

3) Soit (D) la droite d'équation cartésienne $x - y + c = 0$, déterminer c pour que (D) soit une tangente commune à (C) et (C'). (1pt)

4) Tracer (D), (C) et (C') dans le repère. (0,75pt)

Exercice 3 : (4,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(1; 4)$, $B(1; 1)$ et $C(-3; 1)$.

1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés. (0,75pt)

2) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC. (1pt)

3) Donner une représentation paramétrique du cercle (ϵ) : $x^2 + y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$.

- a) Déterminer les éléments caractéristiques de (Γ) . (0,5pt)
- b) Déterminer une représentation paramétrique de (D) . (0,5pt)
- c) Démontrer que la droite (D) et le cercle (C) sont tangents en un point S dont on déterminera les coordonnées. (1pt)

Exercice 4 : (2points)

- 1) On considère le nombre réel $A(x) = 2\cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{5}$.
- a) Exprimer $A(x)$ en utilisant uniquement les sinus. (0,5pt)
- b) Réduire $A(x)$. (0,5pt)
- 2) Montrer que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. (1pt)

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,5 POINTS)

Situation :

Un commercial souhaite aménager un service d'accueil et de renseignement à son entrée ainsi qu'un point d'eau. Ce service aura la forme d'un triangle rectangle dont le côté le plus long mesure 54 m et sa superficie sera de $699,84 \text{ m}^2$. Le coût de la réalisation du point d'eau est estimé à 3 600 000 FCFA et ne disposant que de 2 400 000 FCFA, il place cette somme dans une banque à un taux annuel de $x\%$. Un an plus tard, il retire la totalité de son capital ainsi que les intérêts produits et place la somme totale reçue dans une autre banque où le taux d'intérêt annuel par rapport à la première banque est meilleur de 2%. Après une année dans cette nouvelle banque, elle retire un montant total de 2 851 200 FCFA représentant le capital et l'intérêt réunis. Le montant reçu de cette banque étant encore insuffisant pour la réalisation du projet, les membres de sa réunion décident de lui apporter une aide pour ce projet d'un montant de 1 500 000 FCFA contribué équitablement entre eux. Le jour de la remise de cette aide, 10 membres qui n'avaient pas pu donner leurs contributions apportent finalement leur part et les autres qui avaient déjà participé récupèrent alors chacun un montant de 7 500 FCFA.

Tâches :

- 1) Déterminer les autres dimensions du service d'accueil et de renseignement. (1,5pt)
- 2) Combien de membres sont dans la réunion et combien ont-ils donné chacun ? (1,5pt)
- 3) Quel était le taux d'intérêt annuel de chaque banque où le commercial a eu placé de l'argent ? (1,5pt)