Collège François Xavier Vogt
Département de mathématiques

Année scolaire 2016/2017
Contrôle du 11/03/2017
Classe: TD/TTI; Durée: 4h

Épreuve de mathématiques

Exercice 1 : (6 points)

1) On considère l'équation d'inconnue complexe z: $z^2 + 2\sqrt{3}z+4=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. 0,5pt

b) Écrire les solutions sous forme trigonométrique. 1pt

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Les points I et J du plan ont pour affixes respectives $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

a) Montrer que les points I et J appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. 0,5pt

b) Montrer que le point J est l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ 0,5pt

c) En déduire la nature du triangle OIJ. 0,5pt

3) Soit B le milieu du segment [OI]. Déterminer l'affixe du point B et déterminer la nature du triangle JBO. 0,75pt

4) Soit r la rotation de centre O qui transforme B en A.

a) Déterminer l'écriture complexe de r puis préciser son centre. 1pt

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') image du cercle de centre O et de rayon 2 par r. 0,75pt

5) Faire une figure et compléter par toutes les informations précédentes. 0,5pt

Exercice 2 : (6 points) *Les parties I et II sont indépendantes.*

I- Soit n un nombre entier strictement positif, soit (I_n) la suite numérique définie par :
$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1) a) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, I_n existe et qu'il est positif. 0,5pt

b) Étudier le sens de variation de la suite (I_n). 0,5pt

c) Calculer I_0. 0,5pt

2) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in IN^*$,
$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$ 0,5pt

b) En déduire les intégrales I_1 et I_2. 0,5pt

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} dx$. 0,75pt

II- On donne $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

1) Montrer que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer. 0,75pt

2) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$. 0,75pt

3) En déduire dans IR les solutions de:

a) $2ln^3x - 3ln^2x - 9lnx + 10 < 0$; 0,75pt

b) $2e^{2x} - 3e^x + 10e^{-x} - 9 = 0$.

: (8 points) *Les parties A, B et C sont dépendantes.*

A : On considère la fonction g définie sur $]1;+\infty]$ par : $g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$.

Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$. 0,5pt

2) a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1pt

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1;+\infty]$. 0,5pt

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty]$par $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + ln(x-1)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. 0,5pt

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$. 0,75pt

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. 0,75pt

3) a) Calculer $f(2)$ puis déterminer une équation de la tangente (T) en 2. 0,75pt

b) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

c) Tracer (T) et (C_f). 1pt

Partie C : On considère la fonction F définie sur $]1;+\infty]$ par

$$F(x) = -\frac{1}{e^x} + (x-1)ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)x.$$

1) a) Calculer $F'(x)$. 0,5pt

b) Montrer que F est une primitive de f sur $]1;+\infty]$. 0,5pt

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2. 0,75pt