



Epreuve de Mathématiques

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 points

Exercices 1: 5 points

- 1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ tels que : $x^2 - 2xy = 15$. **1 pt**
- 2) a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier relatif n , le reste de la division de n^2 par 7. **0,5 pt**
b) En déduire alors les solutions de l'équation $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$. **0,5 pt**
- 3) Démontrer que le nombre $7^{n+1} + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8. **1 pt**
- 4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$ **1 pt**
- 5) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. **1 pt**

Exercice 2 : 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,2)$, $B(1, -1, -2)$, $C(2, -1, 3)$ et $D(2,2,2)$.

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$, puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés. **0,5 pt**
b) Calculer la distance du point C à la droite (AB) . **0,5 pt**
c) Vérifier que $AC = d(C, (AB))$ puis déduire la nature du triangle ABC . **0,5 pt**
d) Déterminer l'aire du triangle ABC . **0,5 pt**
- 2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. **0,5 pt**
b) Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$. **0,5 pt**
c) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) . Calculer DH . **0,75 pt**
- 3) Soit le point $E(2, 2 + 3\alpha, 2 - \alpha)$ où α est un réel.
a) Vérifier que E appartient à la droite (DC) . **0,5 pt**
b) Déterminer α pour que E soit le projeté orthogonale de A sur (DC) . **0,75 pt**

Exercice 3 : 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i . A tout point M , distinct de A et d'affixes z , est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.

- a) Montrer l'égalité : $Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$. **0,75pt**
- b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel. **0,5pt**
c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $Re(Z)$ soit négatif ou nul. **0,75pt**
2. a) Calculer les racines carrées de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **1,5pt**
b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{9\pi}{8})$ et $\sin(\frac{9\pi}{8})$. **1,5pt**

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES **4,5 points**

Deux commerçantes, Anna et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Anna dit à Fanta je dispose d'un montant égal à m_1 francs et Fanta répond moi aussi j'ai une somme égale à m_2 francs. L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numérotation de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numérotation de base sept.

Tâche 1 : Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues. **1,5 pt**

Tâche 2 : Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. **1.5pt**

Tâche 3 : Déterminer le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter. **1,5 pt**

Présentation : 0,5 pt

EXAMINATEUR M.SUFO