COLLÈGE F-X. VOGT		**Année scolaire 2023-2024**
Département de Mathématiques	**MINI SESSION**	**Situation Scolaire N°4** **Date : 30 Janvier 2024**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **04 heures** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1 : 03,5 Points

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} p^3$. On pose $d_n = PGCD(S_n, S_{n+1})$ et on admet que si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors il en est de même pour a^2 et b^2. (S'_n) est la suite définie par $S'_0 = 2$ et $S'_{n+1} = S'_n \times (S'_n - 1) + 1$.

1- Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. **0,75pt**

2- Démontrer que si n est pair alors $d_n = (n+1)^2$ et si n est impair alors $d_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. **1pt**

3- En déduire la (les) valeur(s) de n pour laquelle S_n et S_{n+1}sont premiers entre eux. **0,5pt**

4- a) Calculer S'_1 et S'_2. **0,5pt**

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2, S'_n \equiv 7[9]$. **0,75pt**

Exercice 2 : 04 Points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

1- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

2- Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé, unité sur les axes : 2cm. **1pt**

3- Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $x_n \in [0, 1]$. **0,5pt**

b) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$. **0,5pt**

c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$, $x_n \leq \frac{1}{n}$. **0,5pt**

d) Montrer que la suite (x_n) est convergente et préciser sa limite. **0,5pt**

Exercice 3 : 05 Points

On donne dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, un point A et une droite (D) passant par un point B et un vecteur directeur $\vec{u}$. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (D) et on désigne par f l'application, qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$.

1- Montrer que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\overrightarrow{BA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$. **0,75pt**

2- Montrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (L) que l'on déterminera. **0,5pt**

3- Montrer que si le point M n'appartient pas à la droite (L), alors la droite (MM') est orthogonale au plan contenant le point M et la droite (L). **0,5pt**

4- Montrer que $MM' = \|\vec{u}\| d(M, (L))$ où $d(M, (L))$ est la distance du point M à la droite (L). **0,5pt**

5- On considère à présent que le point A a pour coordonnées $\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$ et que B est le point tel que $3\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KN} = \vec{0}$, avec $K(0; 0; 1)$ et $N(0; 1; 1)$.

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$. **0,75pt**

b) Montrer que les points O, A, B et K ne sont pas coplanaires. **0,5pt**

c) Calculer l'aire du triangle OAB et le volume du tétraèdre OABK. ***1pt***

d) En déduire la distance du point K au plan (OAB). ***0,5pt***

Exercice 04 : 03 Points

On considère l'endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que $Kerg$ est un plan vectoriel dont on donnera une base $(\vec{u};\ \vec{v})$. ***0,5pt***

2- Montrer que Img est une droite vectorielle dont on donnera une base $\vec{w}$. ***0,5pt***

3- Montrer que Img est inclus dans $Kerg$. ***0,75pt***

4- En déduire que pour tout vecteur $\vec{e}$ de $\mathbb{R}^3$, $g^2(\vec{e}) = \vec{0}$. ***0,5pt***

5- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $M^n = 0$. ***0,75pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **04,5 POINTS**

Situation :

Une agence de voyage organise différentes excursions dans plusieurs régions du pays et propose la visite de sites incontournables, nommés, A, B, C, D, E et F. Ces excursions sont résumées sur le graphe (***figure 1***), les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heure) entre chaque site.

Un des participants, M. Nkana, une fois arrivée dans la région où se trouve le site F, décide de visiter aussi le musée de la région, qui ne fait pas partir du répertoire de l'agence. Le plan du musée est donné ci-dessous (***figure 2***). Les parties grisées (foncées) représentent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique, ***(deux salles voisines communiquent toujours en dehors des salles A et D, des salles D et H, des salles H et F et enfin de l'accueil Y et la boutique Z).***

Dans la boutique, M. Nkana observe trois objets G, H et J que l'on peut repérer par leur coordonnées dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a alors $G\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $H\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et $J(0, 1, 0)$. La boutique dispose de deux caméras de surveillances, fixées à l'intersection de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$ et de la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Tâches :

1- En utilisant un algorithme à préciser, déterminer le temps de transport minimal pour aller du site A au site F. ***1,5pt***

2- Déterminer la position des deux caméras de surveillance dans la boutique du musée. ***1,5pt***

3- Déterminer le nombre de combinaison de portes du musée qui ne communiquent pas. ***1,5pt***

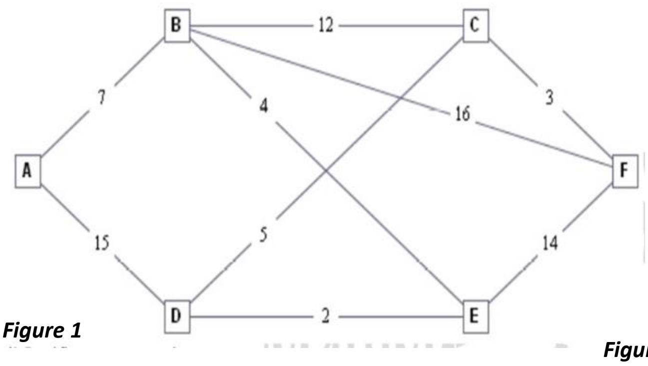

Figure 1

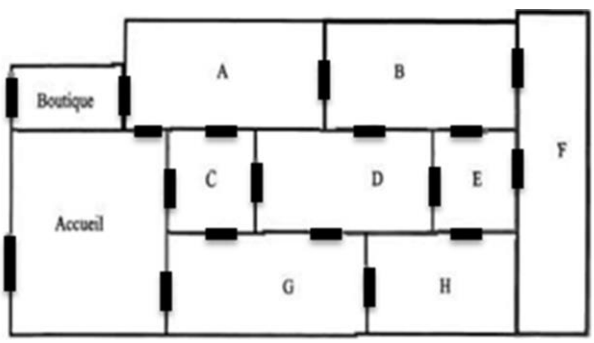

Figure 2