OFFICE DU BACCALAURÉAT DU CAMEROUN
DIRECTION
DIRECTION DES EXAMENS DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail - Patrie

CORRIGÉ HARMONISÉ NATIONAL

EXAMEN: **BACCALAURÉAT**
ÉPREUVE : **MATHÉMATIQUES**
SÉRIES : **C/E**

SESSION : **2024**
DURÉE : **4 Heures**
COEFFICIENTS : **7(C)/6(E)**

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

RÉFÉRENCES ET SOLUTIONS	BARÈMES	COMMENTAIRES
Exercice 1 : 03 points		

1. Montrons que la probabilité pour qu'une équation caractéristique de (E) admette deux solutions réelles distinctes ou confondues est de $\frac{29}{36}$.

Une équation caractéristique $r^2 + 2ar + b = 0$ de (E) admet deux solutions réelles ou confondues si et seulement si $4a^2 - 4b \geq 0$, c'est-à-dire que $a^2 \geq b$.

Tableau de signes de $4a^2 - 4b$

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	0	+	+	+	+	+
2	-	+	+	+	+	+
3	-	+	+	+	+	+
4	-	0	+	+	+	+
5	-	-	+	+	+	+
6	-	-	+	+	+	+

Il y'a 29 couples $(a\,;\,b)$ qui vérifient $a^2 \geq b$, sur un total de 36. Donc cette probabilité est égale $\frac{29}{36}$.

Barème : **1,5 pt**

Commentaires :
0,25 pt pour le discriminant
0,25 pt pour la contrainte $4a^2 - 4b \geq 0$ ou $a^2 \geq b$.
1 pt pour toute démarche correcte menant aux décomptes des couples $(a\,;\,b)$.
N.B. : Tenir compte de l'usage de l'évènement contraire.

2. Déterminons le nombre de fois au minimum dont on doit répéter cette expérience pour être sûr d'avoir au moins 98% de chances que l'équation caractéristique de (E) ait au moins une fois, deux solutions non réelles. Désignons par n ce nombre de fois. Ainsi, on a un schéma de Bernoulli de n épreuves et dont la probabilité du succès est $p = 1 - \frac{29}{36} = \frac{7}{36}$. Avoir au moins une fois deux solutions non réelles c'est, soit 1 fois jusqu'à n fois et dont la probabilité est $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{7}{36}\right)^k \left(\frac{29}{36}\right)^{n-k}$. Il faut alors que $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{7}{36}\right)^k \left(\frac{29}{36}\right)^{n-k} \geq 98\%$. Ce qui est équivalent à $1 - C_n^0 \left(\frac{29}{36}\right)^n \geq \frac{98}{100}$. D'où $n \geq \frac{ln50}{ln36-ln29}$, soit $n \geq 18{,}09$. Donc le nombre minimum de fois de répéter cette expérience est 19.	**1,5 pt**	**0,5 pt** pour la démarche **0,5 pt** pour toute inéquation équivalente juste. **0,25 pt** pour $n \geq 18{,}09$ **0,25 pt** pour le résultat. **NB. :** Apprécier toute autre démarche.
Exercice 2 : 03 points		
1. Déterminons une base du noyau (Kerφ) de φ, puis justifions que φ n'est pas bijectif. Soit $\vec{u}(x; y, z)$ un vecteur de E_3. $\vec{u} \in Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}$. Donc $(-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ est une base du noyau (Kerφ) de φ. Puisque $Ker\varphi \neq \{\vec{0}\}$, alors φ n'est pas bijectif.	**1 pt**	**0,5 pt** pour la démarche **0,25 pt** pour une base de $Ker\varphi$ **0,25 pt** pour toute justification juste que φ n'est pas bijectif.
2. a. Montrons que l'image (Imφ) de φ est un plan vectoriel de E_3. On a dim(Imφ) = dim (E_3) - dim (Kerφ) = 2. Ainsi, Imφ est un sous espace vectoriel de E_3 de dimension 2. Donc Imφ est un plan vectoriel de E_3.	**0,5 pt**	**NB :** Apprécier toute autre démarche
2. b. Vérifions que $\varphi(\vec{k}) = 2\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j})$. $2\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = 2(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) - (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{j} - 3\vec{k} = \varphi(\vec{k})$.	**0,5 pt**	
2. c. Déduisons-en une base de Imφ. Imφ est engendré par $\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j})$ et $\varphi(\vec{k})$. Et donc par $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ d'après la question 2. b. Par conséquent, $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$ constitue une base de Imφ qui est un plan vectorielle d'après la question 2. a.	**1 pt**	**0,5 pt** pour la détermination d'une base. **0,5 pt** pour la justification de cette base.
Exercice 3 : 04 points		
1. Déterminons le sens de variation de F sur $[1; +\infty[$. F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$ et $f(x)$ est strictement positif sur $[1; +\infty[$. Donc F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.	**0,25 pt**	

2. a. Montrons que pour tout réel $t \geq 0, t+2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$. Soit $t \geq 0$. $t - 2\sqrt{2}\sqrt{t} + 2 = (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$. D'où $t - 2\sqrt{2}\sqrt{t} + 2 \geq 0$. Donc $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.	0,25 pt	Apprécier toute autre démarche.
2. b. Déduisons-en que pour tout réel $x \geq 1, F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$. Soit $x \geq 1$ et $t \in [1; x]$. D'après la question précédente 2.a., on a $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leq t+2$. D'où $\int_1^x 2\sqrt{2}\sqrt{t}e^{1-t}dt \leq \int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$ car $e^{1-t} > 0$, ainsi $2\sqrt{2}\int_1^x \sqrt{t}\,e^{1-t}dt \leq \int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$. Donc $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$.	0,5 pt	Apprécier la démarche.
3. a. Montrons à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$. En définissant les fonctions u et v par $u(t) = t+2$ et $v'(t) = e^{1-t}$, on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{1-t}$. D'où $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = [-e^{1-t}(t+2)]_1^x + \int_1^x e^{1-t}dt = [-e^{1-t}(t+3)]_1^x$. Donc $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$.	0,5 pt	Apprécier la démarche.
3. b. Déduisons – en que pour tout réel $x \geq 1, 0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$. Soit un réel $x \geq 1$. D'une part, pour tout $x \geq 1, f(x) > 0$. D'où $F(x) \geq 0$. D'autre part, d'après la question 2.b., $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$ et d'après la question 3.a., on a $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(4 - (x+3)e^{1-x})$. D'où $F(x) \leq \frac{4}{2\sqrt{2}}$ car $(x+3)e^{1-x} > 0$. Ainsi $F(x) \leq \sqrt{2}$. Donc pour tout réel $x \geq 1$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.	0,5 pt	0,25 pt pour chaque inégalité juste.
4. 1. Etudions le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{1-x}}{2\sqrt{x}}(1-2x)$. Donc f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.	0,5 pt	0,25 pt pour la dérivée 0,25pt pour le sens de variation.
4. 2. Montrons que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. Soient n un entier naturel non nul et un réel $t \in [n; n+1]$. Ainsi $n \leq t \leq n+1$, ce qui entraine $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ car f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ qui contient $[n; n+1]$. D'où $\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt$. Donc $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.	0,5 pt	0,25 pt pour $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. 0,25 pt pour $\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt$.
4. 3. (i) Déduisons- en que la suite u est décroissante. Soit n un entier naturel. $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$ et $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ d'après la question 4.2. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$. Donc la suite (u) est décroissante.	0,5 pt	Apprécier la démarche.

4. 3. (ii) Déduisons- en que la suite u est convergente. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x} = 0$ d'après les croissances comparées. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc la suite u est convergente. N.B : On remarque aussi que la suite u est décroissante et minorée par 0. Donc converge.	**0,5 pt**	Apprécier toute autre démarche.
Exercice 4 : 05 points		
1. Montrons que l'équation de (Γ) peut encore s'écrire $\frac{(x-1)^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = 1$ où α et β sont deux réels strictement positifs que nous déterminerons. Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan complexe rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. $M(x\,;\,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 - 6x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow 3(x-1)^2 - 3 - y^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow 3(x-1)^2 - y^2 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{4} = 1.$ Donc $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta = 4$.	**1 pt**	**0,5 pt** pour l'écriture juste sous la forme $\frac{(x-1)^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = 1$. **0,25 pt** pour chaque valeur juste de α et β. **N.B.** :Apprécier toute autre démarche.
2. Déduisons-en que (Γ) est une hyperbole dont nous déterminerons le centre et les sommets par leurs coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. - (Γ) est une hyperbole de par la forme de son équation réduite. - Les coordonnées de son centre sont : (1 ; 0). - Les coordonnées des sommets sont $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1;0\right)$ et $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1;0\right)$.	**1 pt**	**0,25 pt** pour une bonne justification de la nature de (Γ). **0,25 pt** pour chaque couple de coordonnées justes du centre et de chaque sommet.
3. Déterminons la demi distance focale et l'excentricité de (Γ). - La demi distance focale est : $\sqrt{\frac{4}{3}+4} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. - L'excentricité est : $\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 2$.	**0,5 pt**	**0,25 pt** pour la demi distance focale. **0,25 pt** pour l'excentricité.
4. 1. Donnons la nature et les éléments caractéristiques de S. - Nature : S est une similitude plane directe. - Eléments caractéristiques : rapport = 2 ; angle = $\frac{\pi}{6}$ (modulo 2π) ; centre d' affixe $\frac{1-\sqrt{3}-i}{1-2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 1$.	**1 pt**	**0,25 pt** pour la nature de S. **0,25 pt** pour chaque élément caractéristique juste de S.

4. 2. a. Montrons que N est l'image de M par une transformation du plan dont nous donnerons la nature et les éléments caractéristiques. On a $IN = 2IM$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IM};\ \overrightarrow{IN}}) = \frac{\pi}{6}$: ces deux égalités montrent que N est l'image de M par la similitude directe plane de centre I, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Il s'agit de la similitude S.	1 pt	**0,25 pt** pour la nature de la transformation. **0,25 pt** pour chaque élément caractéristique juste de cette transformation.
4. 2. b. Déduisons - en la nature de l'ensemble (Γ') décrit par N lorsque le point M décrit l'ensemble (Γ), puis précisons l'excentricité de (Γ'). - (Γ') est une hyperbole. - Son excentricité est égale 2.	0,5 pt	**0,25 pt** pour la nature de (Γ'). **0,25 pt** pour l'excentricité de (Γ').
Partie B : Evaluation des compétences (05 points)		
Références et solutions	**Critères**	**Indicateurs et barèmes**
Tâche 1 : Déterminons le temps minimum après lequel on doit administrer ce produit aux maquereaux. - Déterminons la quantité Q_n de maquereaux dans l'étang 1 après n mois. Les quantités Q_n sont des termes d'une suite géométrique de premier terme $Q_0 = 250$ et de raison 1,2. Donc $Q_n = 250 \times (1{,}2)^n$. - Déterminons le minimum de mois après lesquels cette quantité aura au moins doublé. Cette quantité aura au moins doublé si et seulement si $Q_n \geq 2 \times Q_0$. D'où $250 \times (1{,}2)^n \geq 2 \times 250$, ainsi $n \geq \frac{ln2}{ln1{,}2}$ c'est-à-dire $n \geq 3{,}8$. Donc, **c'est après au moins 4 mois qu'on doit administrer ce produit aux maquereaux.**	**C₁ : Interprétation correcte de la situation**	**0,25 pt** pour l'évocation d'une suite. **0,25 pt** pour toute inéquation menant au calcul du nombre minimum de mois.
	C₂ : Utilisation correcte des outils	**0,25 pt** pour toute formule juste de récurrence ou explicite de cette suite. **0,25 pt** pour $n \geq 3{,}8$ ou $n = 4$.
	C₃ : Cohérence	**0,5 pt** pour tout bon enchainement du raisonnement. **N.B.** Apprécier le bon enchainement des calculs même si mauvaise interprétation ou mauvaise utilisation des outils.
Tâche 2 : Déterminons le temps minimum après lequel on doit administrer ce produit aux carpes. - Déterminons la quantité $Q(t)$ de carpes dans l'étang 2 après t mois. La vitesse d'accroissement $Q'(t)$ des carpes à un instant t étant le cinquantième de leur quantité $Q(t)$ au même instant, alors $Q'(t) = \frac{1}{50}Q(t)$. D'où $Q(t) = ke^{\frac{1}{50}t}$ et puisque $Q(0) = 450$, donc $Q(t) = 450e^{\frac{1}{50}t}$. - Déterminons le minimum de mois après lesquels cette quantité aura au moins doublé. Cette quantité aura au moins doublé si et seulement si $Q(t) \geq 2Q(0)$. D'où $450e^{\frac{1}{50}t} \geq 2 \times 450$, ainsi $t \geq 50ln2$ c'est-à-dire $t \geq 34{,}65$. Donc, c'est après au moins 35 mois qu'on doit administrer ce produit aux carpes.	**C₁ : Interprétation correcte de la situation**	**0,25 pt** pour l'évocation d'une équation différentielle. **0,25 pt** pour toute inéquation menant au calcul du nombre minimum de mois.
	C₂ : Utilisation correcte des outils	**0,25 pt** pour toute équation différentielle équivalente juste. **0,25 pt** pour $t \geq 34{,}65$ ou $t = 35$.
	C₃ : Cohérence	**0,5 pt** pour tout bon enchainement du raisonnement. **N.B.** Apprécier le bon enchainement des calculs même si mauvaise interprétation ou mauvaise utilisation des outils.

Tâche 3 : Vérifions si le restaurateur a au moins une chance sur deux de servir les deux clients dans l'ordre des commandes passées. En suivant la consigne principale de ce restaurant qui consiste à servir les clients dans l'ordre de passage de leurs commandes (voir situation), la probabilité de servir ces deux clients dans l'ordre des commandes passées est 1. Le restaurateur a ainsi 100% de chance de servir ces clients dans l'ordre. Donc au moins une chance sur deux. **N.B. :** Le texte lié à cette tâche présente des données superflues et quelques insuffisances.		Donner 1,5 pt à chaque candidat.
N.B. : le barème réservé à la présentation porte sur l'ensemble de toute la copie du candidat.	**Présentation**	**0,25 pt pour respect des marches** **0,25pt pour questions bien numérotées.**

Yaoundé le 03 JUIN 2024

Le Président du jury d'harmonisation

Bertrand Calla Ndé

PLEG - IPN - MATHS

Tel 699600021
679373349