Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat
Session : 2024
Séries : D et TI
Épreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Cette épreuve étalée sur deux pages, est constituée de deux parties indépendantes.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

On considère les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A = 2 - i$; $Z_B = 3 - 2i$; et $Z_C = 1 - 2i$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (5 - 3i)z + 4 - 7i = 0$. **(1,5 pt)**

2) Déterminer l'expression complexe de la similitude directe s de centre C et qui transforme A en B. **(1pt)**

3) Préciser les éléments caractéristiques de s. **(0,5pt)**

4) Quelle est l'image de la droite (AC) par la similitude s ? **(0,5pt)**

Exercice 2 : (3 points)

Une loterie comporte vingt billets. Parmi eux, il y a un (seul) billet gagnant 1000 francs et trois billets gagnant 500 francs. Les autres billets ne rapportent aucun franc. Les billets gagnants et non gagnants sont indiscernables par le joueur.

Une personne achète deux billets. On considère la variable aléatoire X donnant la somme totale (en francs) que ces deux billets lui rapportent.

1) Indiquer toutes les valeurs possibles de X. **(1pt)**

2) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X. **(1,5pt)**

3) Quelle est la probabilité pour que ce joueur puisse gagner plus de 500 francs ? **(0,5pt)**

Exercice 3 : (5 points)

On considère sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, les équations différentielles (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$ et (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal avec $1\,cm$ pour unité sur l'axe des abscisses (Ox) et $2\,cm$ pour unité sur l'axe des ordonnées (Oy).

1) a) Résoudre l'équation (E). **(1pt)**

b) Résoudre l'équation (E'). **(0,5pt)**

2) Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par l'égalité $g(x) = -1 - (x + 0{,}5)e^{-2x}$.

a) Démontrer que g est la solution de l'équation (E') vérifiant les égalités $g(0) = -1{,}5$ et $g'(0) = 0$. **(0,5pt)**

b) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une équation d'une asymptote à la courbe (C_g) de g. **(0,75pt)**

c) Déterminer le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g. **(0,75pt)**

d) Tracer la courbe (C_g) dans le plan. **(1pt)**

e) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties, $\int_0^2 (x + 0{,}5)e^{-2x}dx$. **(0,5pt)**

Exercice 4 : (3,5 points)

Les dépenses mensuelles X et les capitaux associés Y d'une PME de cinq mois consécutifs sont donnés dans le tableau statistique suivant :

http://sujetexa.com
Scanné avec CamScanner

Dépenses X (en millions de francs)	1	1,5	α	2,5	3
Capitaux Y (en millions de francs)	2,5	3	4,5	8	9

α est un montant masqué par le statisticien qui mentionne néanmoins qu'une équation de la droite de régression de Y en X que la valeur exacte de α a permis d'obtenir est donnée par l'égalité $y = 3,6x - 1,8$.

1) Démontrer que la valeur exacte de α est 2. **(1pt)**

2) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double. **(1pt)**

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et donner une interprétation du résultat obtenu. **(1pt)**

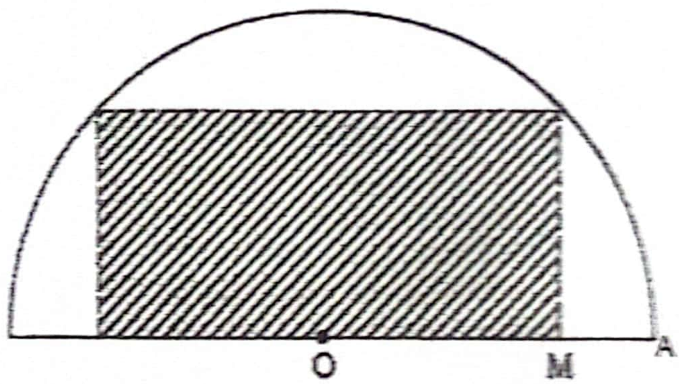
4) Donner une estimation du capital de cette PME au 6[e] mois lorsqu'elle avait dépensé 4 millions de francs. **(0,5pt)**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Le 1[er] janvier 2016, Paul a épargné une somme de 5 millions de francs dans une banque où le taux d'intérêt annuel composé est de $4,5\,\%$. Il compte vider plus tard ce compte pour investir dans l'élevage à hauteur de 7 millions de francs.

Paul a dans son village un terrain dont la surface a la forme d'un demi-disque de centre O et de rayon $100\,m$. Voir figure ci-contre. Les points O et A représentent respectivement un oranger et un avocatier situés sur la bordure du terrain.



À partir d'un point M du rayon [OA], il veut protéger une surface rectangulaire (hachurée sur la figure) dont deux de ses sommets sont sur l'arc de cercle. Cet espace rectangulaire sera exploité pour l'élevage et financé grâce à l'argent épargné. Paul voudrait que cet espace ait une aire maximale alors que son épouse, qui a besoin du reste du terrain pour l'agriculture, souhaite que l'espace rectangulaire destiné à l'élevage garde la forme voulue par Paul et soit plutôt la moitié de l'espace total.

En 2020, Paul se demandait déjà si le moment n'était pas venu pour commencer son projet de 7 millions provenant de l'argent épargné.

Tâches:

1) À quelle distance du point O doit-on placer le point M pour que l'espace rectangulaire ait une aire maximale ? **(1,5pt)**

2) Y a-t-il de positions du point M permettant à la surface rectangulaire d'être la moitié de la surface initiale du terrain ? **(1,5pt)**

3) À partir de la quantième année d'épargne, Paul pourra-t-il réaliser son projet ? **(1,5pt)**

Présentation : **(0,5pt)**

Scanné avec CamScanner

MINESEC **MATHEMATIQUES**

OBC **Série : D & Ti**

PROPOSITION DE CORRIGE BACCALAUREAT 2024

Partie A : Evaluation des ressources

Eléments de correction	Barème	Commentaires
EXERCICE 1 : 3,5pts		
1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(5-3i)z+4-7i=0$. On a : $\Delta = [-(5-3i)]^2-4(1)(4-7i)=-2i$ Trouvons les racines de Δ sous la forme $x+iy$, tels que $(x+iy)^2=\Delta$: On a : $\|-2i\|=2$ $Re(-2i)=0$ $Im(-2i)=-2$ Ainsi : $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=-2 \end{cases}$ d'où les racines : $1-i$ et $1+i$ Par la suite, on a : $z_1=\frac{5-3i+1-i}{2}=3-2i$ et $z_2=\frac{5-3i-1+i}{2}=2-i$ $S_{\mathbb{C}}=\{3-2i;2-i\}$	**1,5pt**	0,25pt pour calcul de Δ 0,25pt pour chaque racine de Δ 0,5pt pour z_1 et z_2 0,25pt pour l'écriture de la solution
2. Déterminons l'expression complexe de la similitude directe s : Soit $(s): z'=az+b$ $s(C)=C$ et $s(A)=B$ On a : $a=\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=\frac{3-2i-1+2i}{2-i-1+2i}=1-i$ et $b=Z_C-aZ_C=1-2i-(1-i)(1-2i)=2+i$ D'où : $(s): z'=(1-i)z+2+i$	**1pt**	0,5pt pour le calcul de a 0,5pt pour le calcul de b Apprécier autre méthode
3. Précisons les éléments caractéristiques de s : On a : $\|1-i\|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$		0,25pt pour le rapport

<table>
<tr><td>Soit θ un argument de $1-i$; on a : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}$
Les éléments sont :
- Rapport : $k = \sqrt{2}$
- Angle : $-\frac{\pi}{4}$
- Centre : le point C d'affixe : $1-2i$</td><td>0,5pt</td><td>0,25pt pour l'angle</td></tr>
<tr><td>4. Déterminons l'image de la droite (AC) par s :
On a : $s(C) = C$ et $s(A) = B$
Donc l'image de la droite (AC) est la droite (BC).</td><td>0,5pt</td><td>Apprécier autre méthode</td></tr>
<tr><td colspan="3">EXERCICE 2 : 3pts</td></tr>
<tr><td>1. Indiquons toutes les valeurs possibles de X :
$X = \{0; 500; 1000; 1500\}$</td><td>1pt</td><td>0,25pt pour chaque valeur</td></tr>
<tr><td>2. Dressons le tableau de la loi de probabilité de X :
<table><tr><td>X_i</td><td>0</td><td>500</td><td>1000</td><td>1500</td></tr><tr><td>$P(x = X_i)$</td><td>$\frac{120}{190}$</td><td>$\frac{48}{190}$</td><td>$\frac{19}{190}$</td><td>$\frac{3}{190}$</td></tr></table></td><td>1,5pt</td><td>0,25pt pour chaque probabilité
0,25pt pour le tableau</td></tr>
<tr><td>3. Déterminons la probabilité pour que le joueur puisse gagner plus de 500F :
$P = \frac{19}{190} + \frac{3}{190} = \frac{22}{190} = \frac{11}{95}$</td><td>0,5pt</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">EXERCICE 3 : 5pts</td></tr>
<tr><td>1. a. Résolvons l'équation (E): $y'' + 4y' + 4y = 0$
Soit l'équation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = 0$
on a : $\Delta = (4)^2 - 4(4) = 0$ et $r_0 = -\frac{4}{2} = -2$ d'où $y(x) = (Ax+B)e^{-2x}$</td><td>1pt</td><td>0,25pt pour Δ
0,25pt pour r_0</td></tr>
</table>

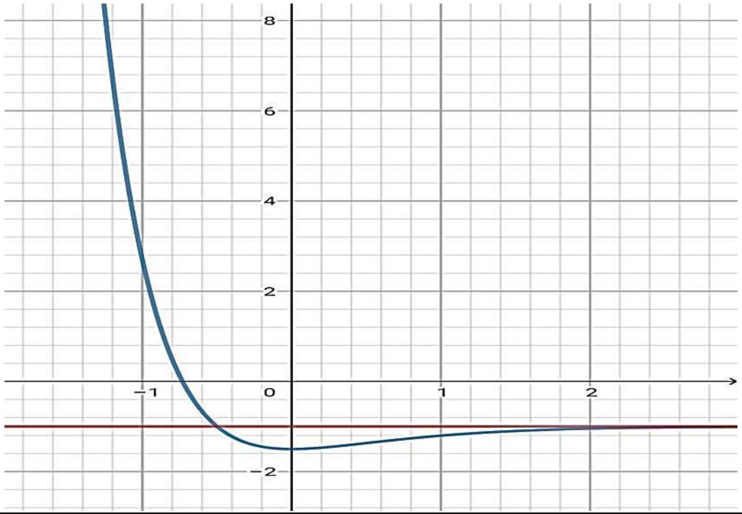
avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$		0,5pt pour la solution
b. Résolvons l'équation $(\boldsymbol{E'})$: $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = -4}$: posons $h(x) = a$ solution particulière de (E'). On a $h'(x) = 0$ et $h''(x) = 0$ ainsi, $h'' + 4h' + 4h = 0 + 4(0) + 4(a) = 4a$. Par identification des coefficients, $4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$ d'où $h(x) = -1$ Et on a pour solution générale : $g(x) = -1 + (Ax + B)e^{-2x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$	**0,5pt**	
2. a. Démontrons que $\boldsymbol{g(x) = -1 - (x + 0,5)e^{-2x}}$ est la solution de $(\boldsymbol{E'})$ vérifiant les conditions initiales $\boldsymbol{g(0) = -1,5}$ et $\boldsymbol{g'(0) = 0}$: Soit $g(x) = -1 + (Ax + B)e^{-2x}$ solution de (E'). On a : $g(0) = -1 + B \Leftrightarrow -1 + B = -1{,}5 \Leftrightarrow B = -0{,}5$ On a : $g'(x) = Ae^{-2x} - 2e^{-2x}(Ax + B) = (-2Ax + A - 2B)e^{-2x}$ $g'(0) = A - 2B \Leftrightarrow A - 2B = 0$ d'où $A = -1$ Ainsi, $g(x) = -1 - (x + 0{,}5)e^{-2x}$	**0,5pt**	0,25pt pour la valeur de A 0,25pt pour la valeur de B
b. Calculons les limites de $\boldsymbol{g}$ en $-\infty$ et $+\infty$ et déduisons une équation d'une asymptote à $(\boldsymbol{C_g})$: on a : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$ La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C_g) en $+\infty$	**0,75pt**	0,25pt pour chaque résultat
c. déduisons le signe de $\boldsymbol{g'(x)}$ et dressons le tableau de variations de $\boldsymbol{g}$: $On\ a$: $g'(x) = 2xe^{-2x}$ ainsi, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ D'où le tableau de signes de variations ci-dessous : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>-</td><td></td><td>+</td></tr></table>	**0,75pt**	0,25pt pour la dérivée 0,25pt pour son signe

<table>
<tr>
<td>

g	$-\infty$ ↘ $-1{,}5$ ↗ -1

</td>
<td></td>
<td>0,25pt pour le TV</td>
</tr>
<tr>
<td>

d. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_g)$:



</td>
<td>1pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

e. Déterminons à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^2 (x+0,5)e^{-2x}\,dx$:

Posons : $u(x) = x + 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad u'(x) = 1$

et $v(x) = e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

on a : $\int_0^2 (x+0{,}5)e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(x+0{,}5)e^{-2x}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2}(x+0{,}5)e^{-2x}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$

$= -\frac{6}{4}e^{-4} + \frac{1}{2}$

</td>
<td>0,5pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

EXERCICE 4 : 3,5pts

</td>
</tr>
<tr>
<td>

1. Démontrer que la valeur exacte de α est 2 :

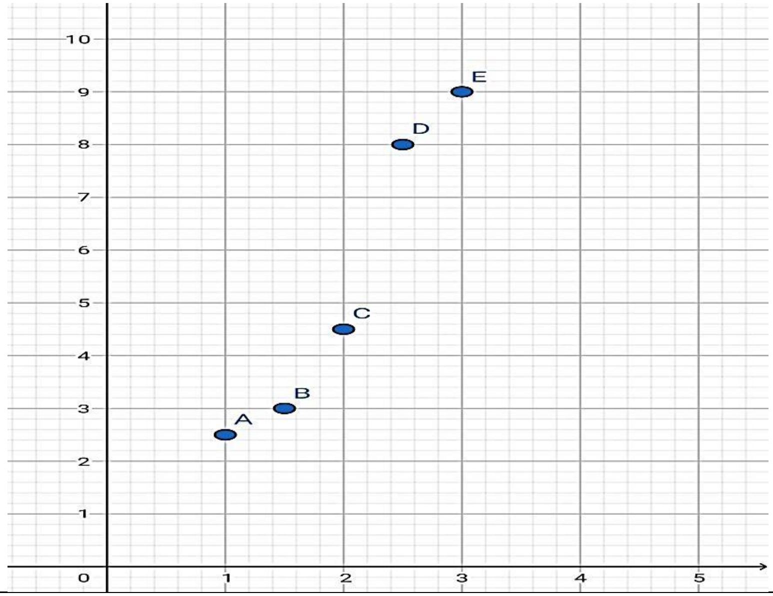
On a : $\bar{x} = \frac{8+\alpha}{5}$ *et* $\bar{y} = \frac{27}{5}$

</td>
<td>1pt</td>
<td>0,25pt pour $\bar{x}$
0,25pt pour $\bar{y}$</td>
</tr>
</table>

Ainsi, $\left(\frac{27}{5}\right) - 3,6\left(\frac{8+\alpha}{5}\right) = -1,8 \quad \Leftrightarrow \quad -3,6\alpha - 1,8 = -9$ d'où $\alpha = 2$

0,5pt pour α

2. Représentons le nuage de points associé à cette série statistique double :



1pt

3. Calculons le coefficient de corrélation linéaire r et donnons une interprétation du résultat obtenu :

Soit le tableau suivant :

						Total
X	1	1,5	2	2,5	3	10
Y	2,5	3	4,5	8	9	27
X^2	1	2,25	4	6,25	9	22,5
Y^2	6,25	9	20,25	64	81	180,5
$X \times Y$	2,5	4,5	9	20	27	63

On a : $Cov(X;Y) = 1,8$ $\quad V_X = 0,5$ et $V_Y = 6,94$

1pt

<table>
<tr><td>Ainsi : $r = \frac{1,8}{\sqrt{0,5 \times 6,94}} = 0,96$
Interprétation : On note une forte corrélation car $0,85 \leq |r| < 1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Donnons une estimation du capital de cette PME au 6ème mois :
Soit $X = 4$, on a : $y = 3,6(4) - 1,8 = 12,6$
Soit un capital de $12,6$ milions de francs</td><td>0,5pt</td><td>0,25pt pour le calcul
0,25pt pour la conclusion</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Partie B : Evaluation des Compétences</u></td></tr>
<tr><th>Eléments de correction</th><th>Critères</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Tâche 1 : Déterminons la distance à laquelle on doit placer le point M pour que l'espace rectangulaire ait une aire maximale :
Soit x la distance OM.
- Trouvons la largeur l du rectangle :
D'après la propriété directe de Pythagore, on a : $100^2 = x^2 + l^2$
Ainsi, $l = \sqrt{10000 - x^2}$
- Trouvons l'aire du rectangle : $A(x) = 2x\sqrt{10000 - x^2}$
- Maximisons cette surface :
$A(x)$ est définie sur $[0; 100]$, on a :
$$A'(x) = 2\sqrt{10000 - x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{10000 - x^2}} \times 2x = \frac{20000 - 4x^2}{\sqrt{10000 - x^2}}$$
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 20000 - 4x^2 = 0$ On a : $x = -50\sqrt{2}$ et $x = 50\sqrt{2}$
D'où le tableau de signes de variations ci-dessous :
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$50\sqrt{2}$</td><td>100</td></tr>
<tr><td>$A'(x)$</td><td>+</td><td>-</td><td></td></tr>
</table></td><td>C_1 : 0,5pt</td><td>0,25pt l'idée de trouver $A(x)$
0,25pt pour l'idée d'étudier $A(x)$</td></tr>
<tr><td>C_2 : 0,5pt</td><td>0,5pt pour les calculs intermédiaires justes</td></tr>
<tr><td>C_3 : 0,5pt</td><td>0,25pt pour la corrélation
0,25pt pour les unités</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A : $0 \nearrow A\left(50\sqrt{2}\right) \searrow 0$
Conclusion : la distance OM devra être de $50\sqrt{2}\,m$</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Tâche 2 : Déterminons s'il y'a une position du point M permettant à la surface rectangulaire d'être la moitié de la surface initiale du terrain :
Soit x la distance OM.
- Egalisons les deux surfaces :
$A(x) = \frac{100^2\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x\sqrt{10000 - x^2} = 5000\pi \quad \Leftrightarrow \quad -4x^4 + 40000x^2 - (5000\pi)^2 = 0$
- Vérifions si l'équation admet des solutions :
Posons $X = x^2$, on obtient l'équation : $-4X^2 + 40000X - (5000\pi)^2 = 0$
On a : $\Delta = (40000)^2 - 4(-4)[-(5000\pi)^2] < 0$
L'équation n'admet pas de solution.
Conclusion : Un tel point n'existe pas.</td>
<td>C_1 : 0,5pt</td>
<td>0,25pt pour l'idée d'égaliser les deux surfaces
0,25pt pour l'idée de résoudre une équation</td>
</tr>
<tr>
<td>C_2 : 0,5pt</td>
<td>0,5pt pour les calculs justes choisis</td>
</tr>
<tr>
<td>C_3 : 0,5pt</td>
<td>0,25pt pour la corrélation
0,25pt pour la conclusion</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Tâche 3 : Déterminons l'année d'épargne à laquelle Paul pourra réaliser son projet
Soit U_n la somme épargnée à l'année n.
- Retrouvons la suite U_n :
On a $U_0 = 5$ et U_n suit une progression géométrique de raison $q = 1{,}045$. Ainsi ;
$$U_n = (1{,}045)^n \times 5$$</td>
<td>C_1 : 0,5pt</td>
<td>0,25pt pour l'idée de retrouver une suite
0,25pt pour l'idée de calculer le rang n</td>
</tr>
<tr>
<td>C_2 : 0,5pt</td>
<td>0,5pt pour les calculs</td>
</tr>
</table>

- Déduisons la valeur de n :		intermédiaires juste
$U_n = 7 \quad \Leftrightarrow \quad (1{,}045)^n \times 5 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{7}{5}\right)}{\ln(1{,}045)} \approx 7{,}65$ Conclusion : Il réalisera son projet à la 8ème année	C_3 : 0,5pt	0,25pt pour la corrélation 0,25pt pour la conclusion
La présentation porte sur la copie entière	0,5pt	0,25pt pour lisibilité 0,25pt pour l'absence de rature

Par : Genius Team (atiom's)