Dérivée d'une fonction

EXERCICE 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

2. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{2}$.

3. $f(x) = (\sqrt{x+1}) \times\ (x^2 - 2)$.

4. $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times\ (x + 4)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$.

6. $f(x) = \dfrac{-3}{2x - 1}$.

7. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$.

8. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$.

9. $f(x) = (5x^2 + 1)^2$.

10. $f(x) = (-2x - 1)^3$.

11. $f(x) = \sqrt{3x - 4}$.

12. $f(x) = 2x\sqrt{-3x + 2}$.

EXERCICE 2 :

Determiner une equation de la tangente T à la courbe representative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. f(x)= $3x^2$-x+1 avec a= -1.

2. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ avec a= 3.

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ avec a= 9.

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}.$$

On note C sa courbe representative dans un repère orthonormé .
1. Determiner les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale .
2. Existe-t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à - 2 ?

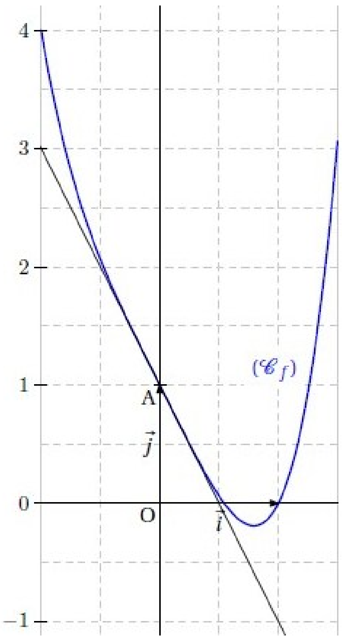
3 Determiner les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y =$
.

EXERCICE 4 - EQUATION DE LA TANGENTE À UNE COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^4 - 2x + 1$.
Soit (Cf) sa courbe représentative.

1. Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point A d'abscisse 0.

2. Tracer dans un même repère la courbe (Cf) et la tangente (T) sur l'intervalle [- 1 ; 1,5].



EXERCICE 5 - CALCULER UNE LIMITE

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}.$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Calculer f ' (0).

2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

EXERCICE 6 - PRIX DE REVIENT ET VITESSE D'UN CAMION

Un camion doit faire un trajet de 150 km.
Sa consommation de gasoil est de $6+\frac{v^2}{300}$ llitres par heure, où v désigne sa vitesse enkm/h.
Le prix du gasoil est de 0,9 € le litre et on paie le chaufeur 12 € par heure.

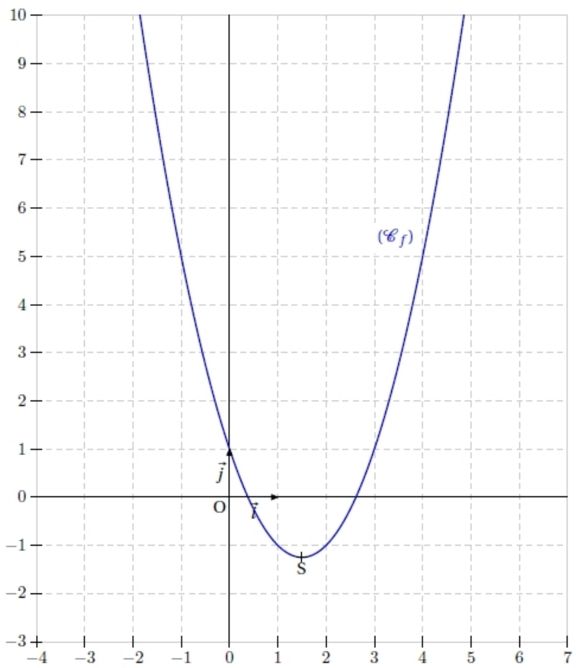
1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v.

2. Calculer le prix de revient P(v) du trajet en fonction de v.

3. Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient P(v) de la course soit minimal ?

EXERCICE 7 - SOMMET D'UNE PARABOLE

Soit (P) la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Calculer les coordonnées de son sommet S.



EXERCICE 8 - ETUDE D'UN RECTANGLE

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm².

2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

a. Exprimer S en fonction de la largeur l.

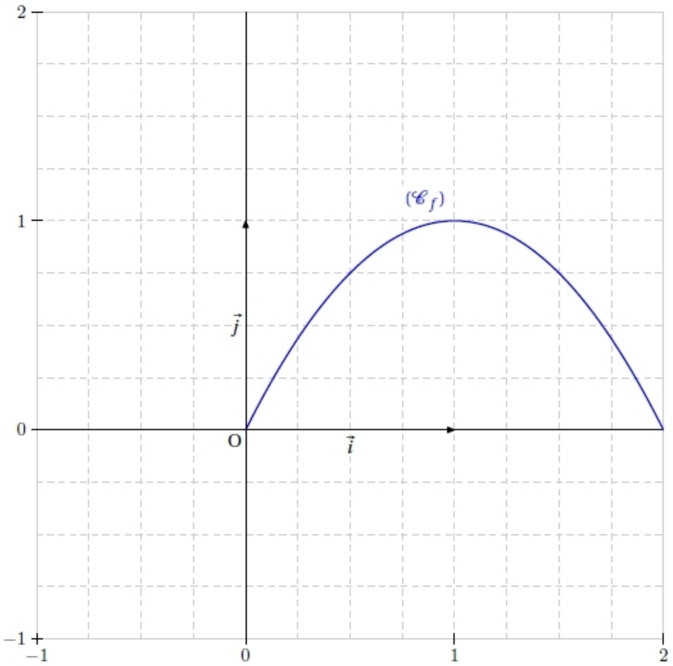
b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur [0 ; 2].

c. En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 m et l'aire S est maximale.



EXERCICE 9 - FONCTION NUMÉRIQUE ET RACINE

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.
On note (Cf) sa représentation graphique.

1.Calculer la dérivée f ' de f puis étudier son signe.

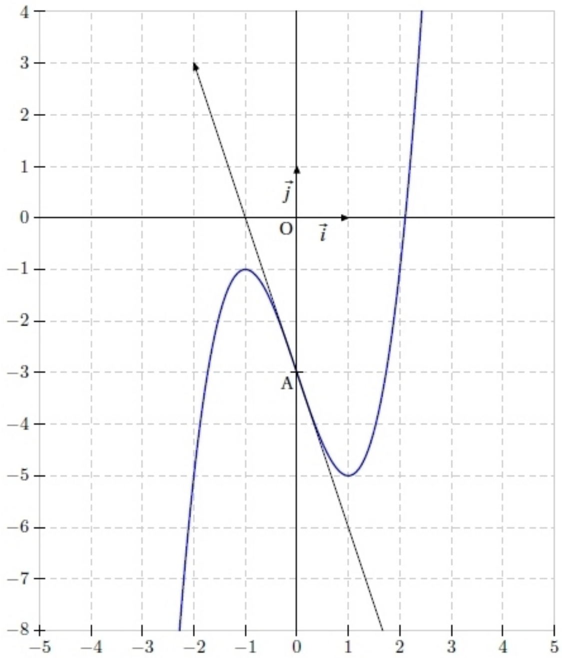
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

4. Tracer (T) et (Cf) dans un même repère.

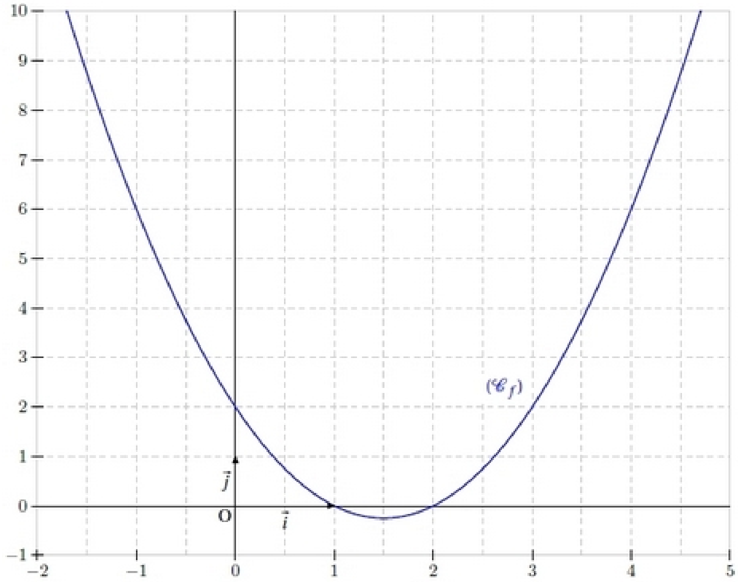
5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3].

6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.



EXERCICE 10 - TABLEAU DE VARIATION ET ÉQUATION

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Résoudre l'équation f(x) = 0.



EXERCICE 11 - ETUDE DE DEUX FONCTIONS ET DES TANGENTES

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.
On note (Cf) sa courbe représentative.
On considère également la fonction g définie par g(x) = 3 - x.
On note (D) sa représentation graphique.

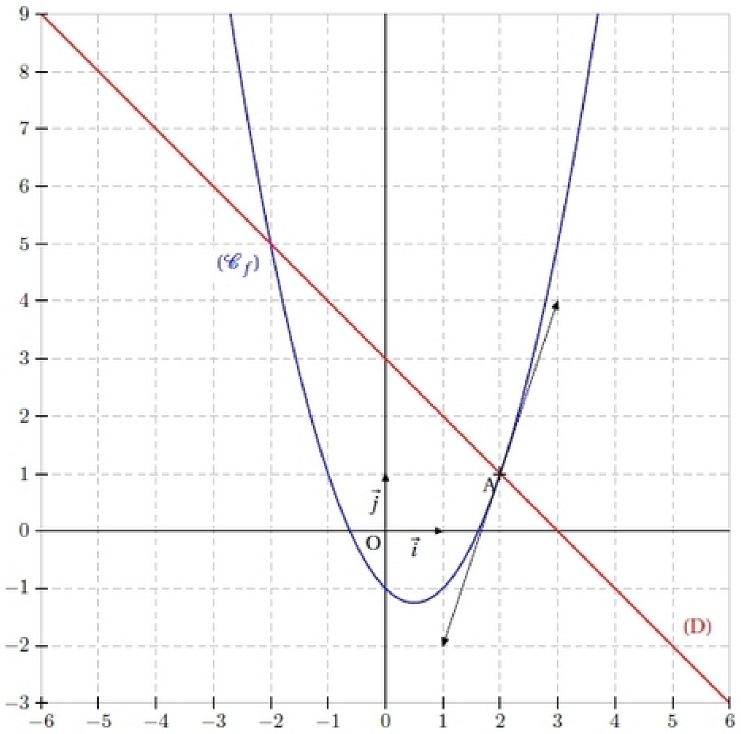
1. Calculer la dérivée f' de f.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse $x_0 = 2$.

3. Résoudre par le calcul l'équation g(x) = f(x).

4. Préciser les coordonnées des points d'intersections de (Cf) et (D).

5. Tracer sur un même repère les droites (T), (D) et la courbe (Cf).



EXERCICE 12 - DÉTERMINER LA DÉRIVÉE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$
$$g(x) = (2x+3)(3x-7)$$
$$h(x) = \frac{2x+4}{3x-1} \; pour \; x \neq \; \frac{1}{3}$$
$$k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^2$$

EXERCICE 13 - DÉRIVÉE DE PLUSIEURS FONCTIONS

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$$
$$h(x) = \sqrt{x}(1 - \frac{1}{x})$$
$$k(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$

EXERCICE 14 - VALEUR ABSOLUE ET DÉRIVABILITÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+3|$.

Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15 - DÉRIVÉE D'UNE FONCTION PUISSANCE

Démontrez que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors:

a) u^2 est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$.

b) u^3 est dérivable sur I et $(u^3)'=3u^2u'$.

EXERCICE 16 - SENS DE VARIATION

On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x)\leq,\frac{1}{4}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-,(,x-\frac{1}{2},,)^2$.

4. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;\frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

EXERCICE 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+6x+5$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y=$.

EXERCICE 18

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=3x-4x^3$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-4x-4}{x^2+2x+5}.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A.

EXERCICE 20

Etudier les variations sur]-2 ; 1[de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}.$$

EXERCICE 21 - COURBE REPRÉSENTATIVE, DÉRIVÉE ET TANGENTE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

On appelle C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1) a) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour C_f ?

b) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f

2) a) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) Cette tangente recoupe C_f en deux autres points.

b.1) Montrez que les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :

$$x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = 0$$

b.2) Vérifiez que l'on a :

$$x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = (x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$$

b.3) En déduire les abscisses de ces points.

EXERCICE 22 - PARABOLE ET TANGENTES

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$

et (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{3(3x+5)}{4(x+3)}$.

Le plan est ramené à un repère orthonormal.

1) Montrer que (P) et (H) rencontrent l'axe (Oy) en un même point A.

2) Montrer que les tangentes en A aux courbes (P) et (H) sont perpendiculaires.

Rappel : Dans un r.o.n deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à –1 .

EXERCICE 23 - TANGENTE ET DÉTERMINER UN RÉEL

Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y = (m-1)x^2 + (3m+2)x + 4$

admette au point d'abscisse –1 une tangente de coefficient directeur 6.

EXERCICE 24 - DÉTERMINER L'ABSCISSE D'UNE TANGENTE

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et soit (C) sa courbe représentative.

Déterminer les abscisses des points de (C) où la tangente :

1) est horizontale

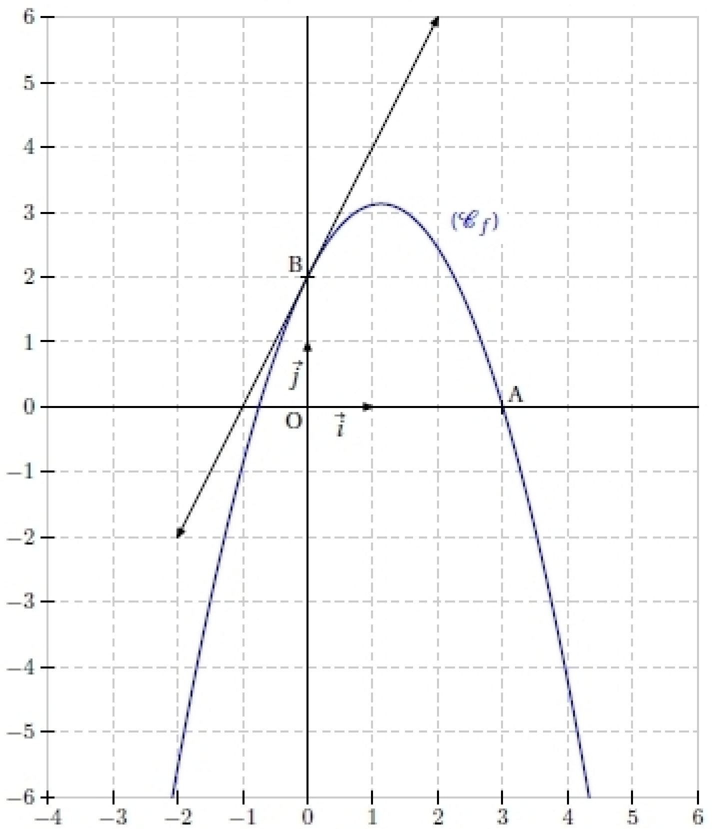
2) est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x - 5$.

EXERCICE 25 - RETROUVER L'EXPRESSION D'UNE FONCTION CARRÉE

Une parabole (P) admet dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ une équation du type :

$y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$
1. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que (P) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation y = 2x + 2 pour tangente.

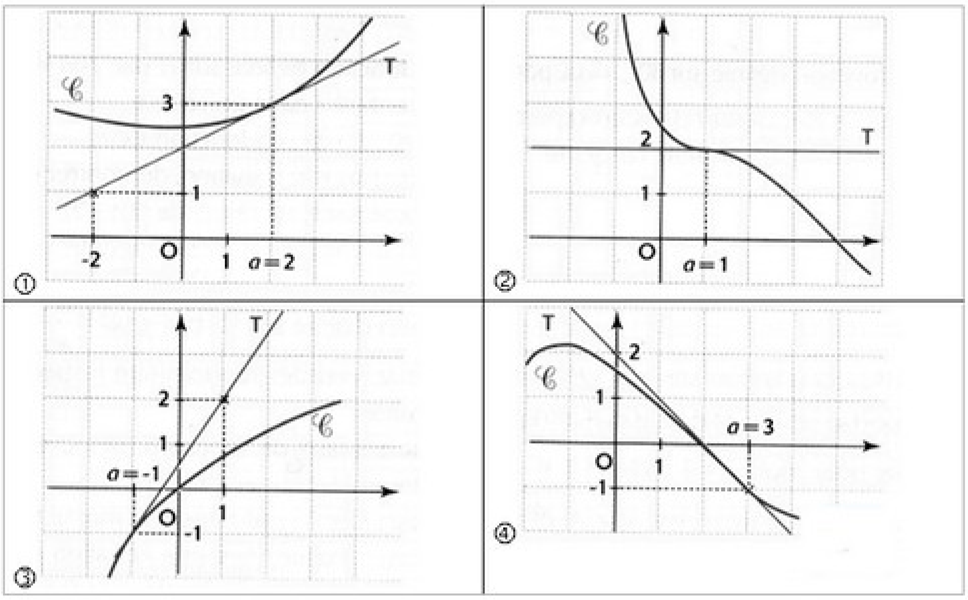
2. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de (P) avec (Ox).



EXERCICE 26 - NOMBRE DÉRIVÉE ET TANGENTE À UNE COURBE

(C) représenter une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite T est tangente à (C) au point d'abscisse a.

Dans chaque cas détermine $f'(a)$et donner une équation de la tangente T.



EXERCICE 27 - EQUATION DE TANGENTE À UNE PARABOLE

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

dont la parabole (Cf) passe par les points A (0 ; 1) et B (2 ; 3).

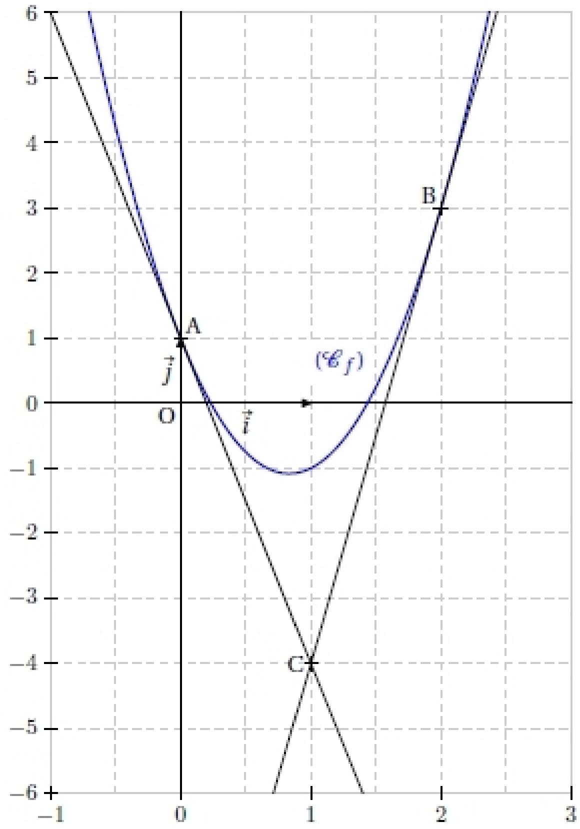
Les tangentes en A et B se coupent au point C (1 ; - 4).

1. Déterminer une équation des tangentes à (Cf).

En déduire f ' (0) et f ' (2).

2. Exprimer f ' (x) en fonction de a, b et c.

3. A l'aide des valeurs de f ' (0), f ' (2) et f(0), trouver trois équations vérifiées par a, b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f.



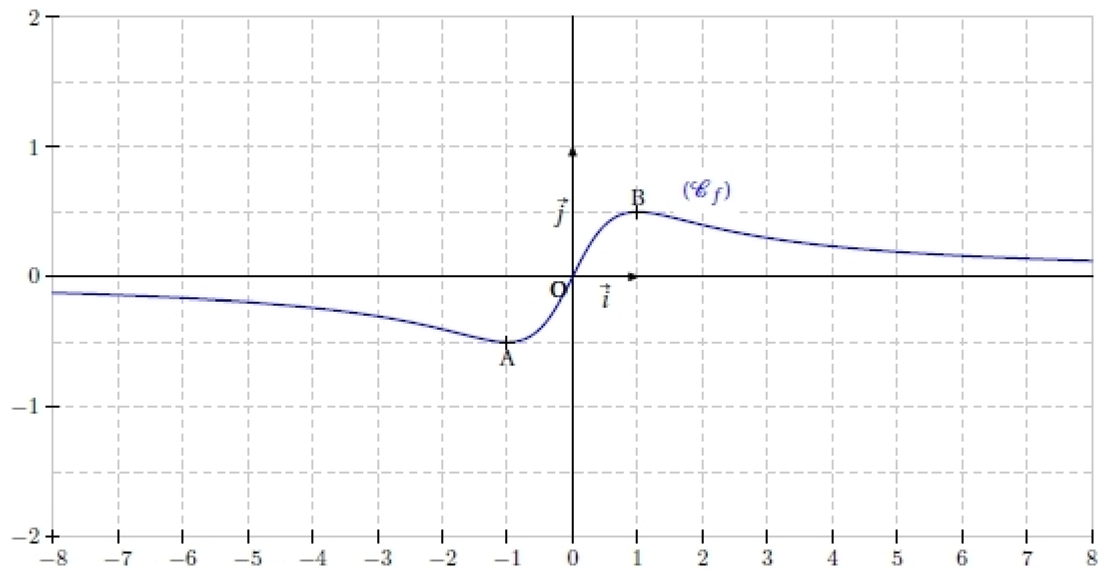
EXERCICE 28 - LIMITE EN L'INFINI ET TABLEAU DE VARIATION

On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer la dérivée f '' de f et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.



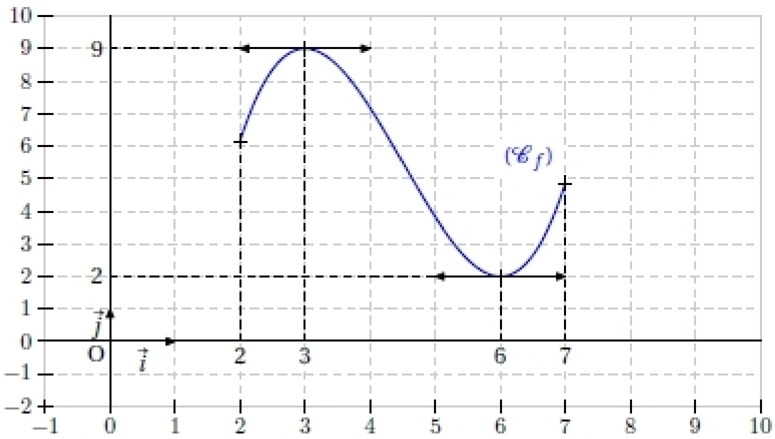
EXERCICE 29 - LECTURE GRAPHIQUE

Ci-dessous est donnée la courbe (Cf) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [2 ; 7].

1. Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de :

f(3) ; f ' (3) ; f(6) ; f ' (6).

2. Le graphique ne permet pas la lecture de f ' (4).
Préciser néanmoins son signe. Expliquer.

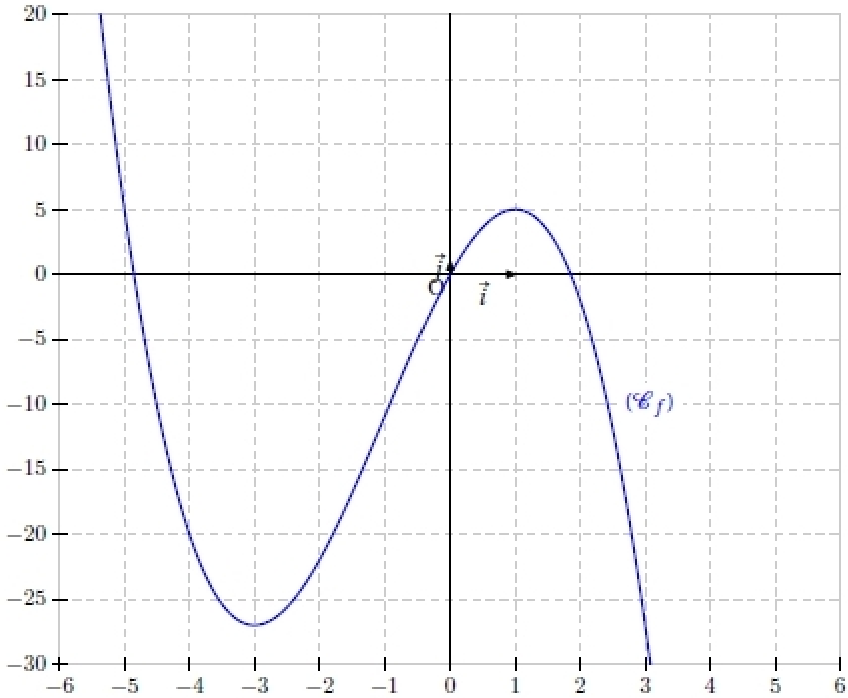


EXERCICE 30 - CALCUL D'UNE DÉRIVÉE ET TABLEAU DE VARIATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.



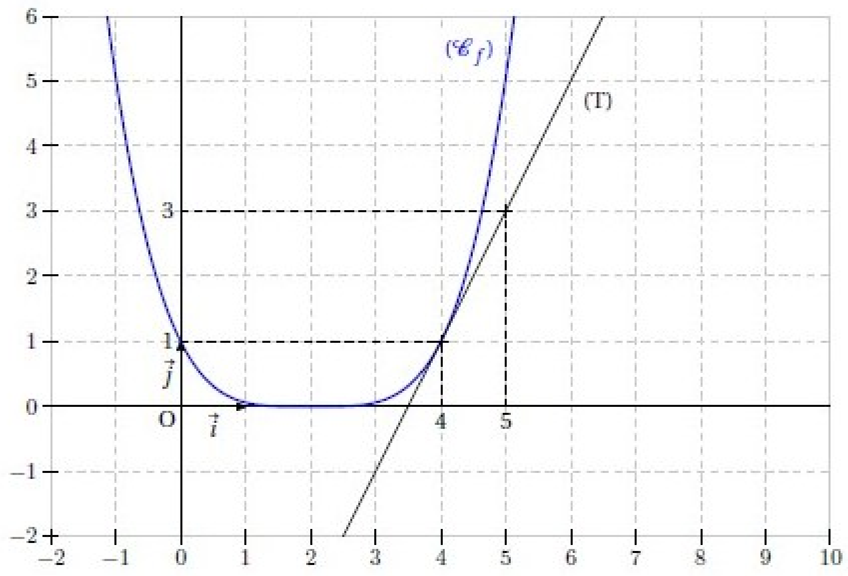
EXERCICE 31 - LECTURE GRAPHIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe (Cf) de la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (1 - \frac{x}{2})^4$ ainsi que la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse $x_0 = 4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre f ' (4).

2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre f ' (3).

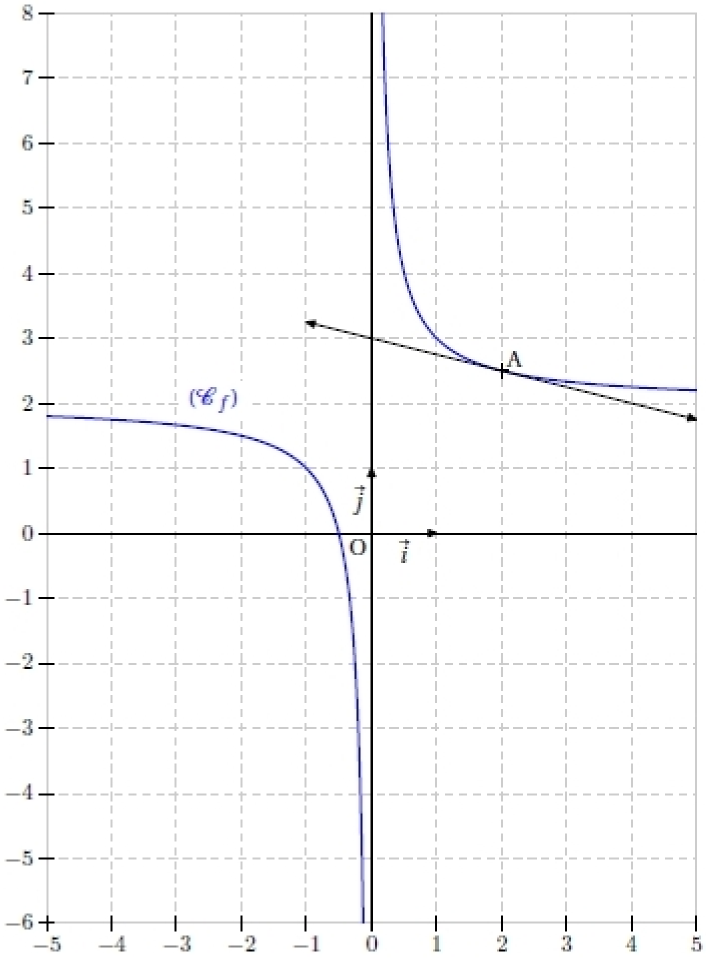


EXERCICE 32 - DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) représentant f au point d'abscisse 2.



EXERCICE 33 - CALCUL DE DÉRIVÉE ET DU NOMBRE DÉRIVÉ

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}\ sur\ ]0;+\infty[$$

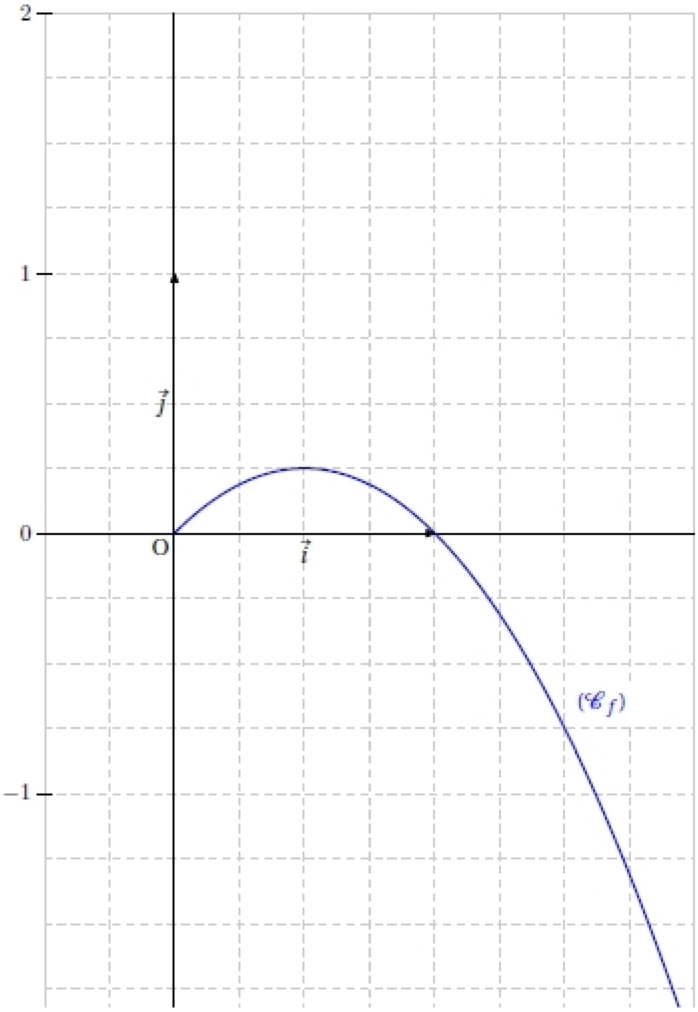
Unbalanced Eqn

2. Calculer f ' (16) et g ' (2).

EXERCICE 34 - SENS DE VARIATION ET ENCADREMENT

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$.

2. En déduire un encadrement de f(x) sur [0 ; 2].



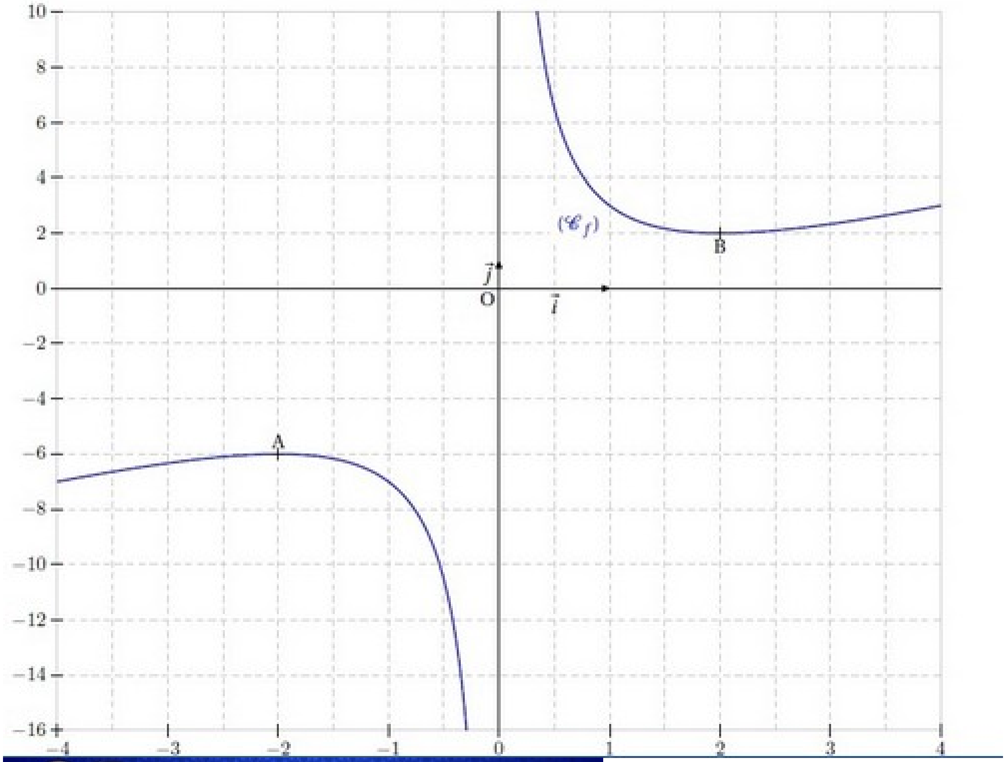
EXERCICE 35 - ETUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f ' et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$.



$(\mathscr{C}_f)$
A
B
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$

Voir le corrigé de ces exercices