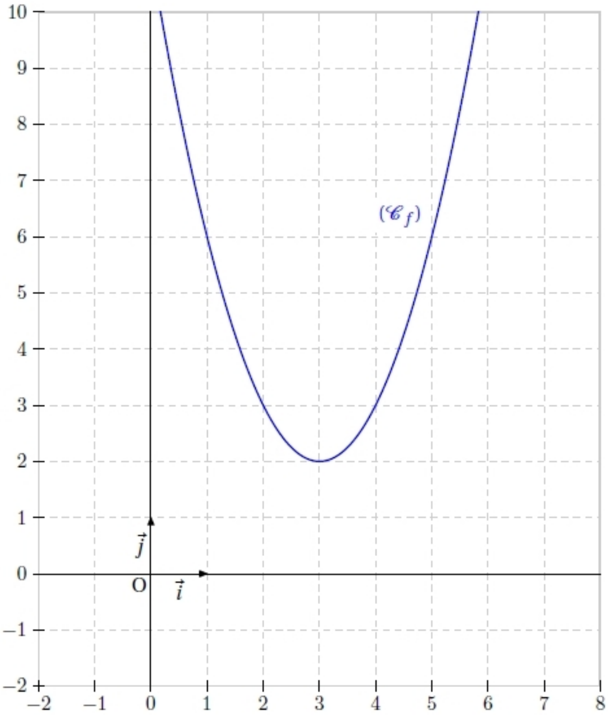
Fonctions et variations

EXERCICE 1 - SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $I =]-\infty; 3]$.



EXERCICE 2 - SENS DE VARIATION

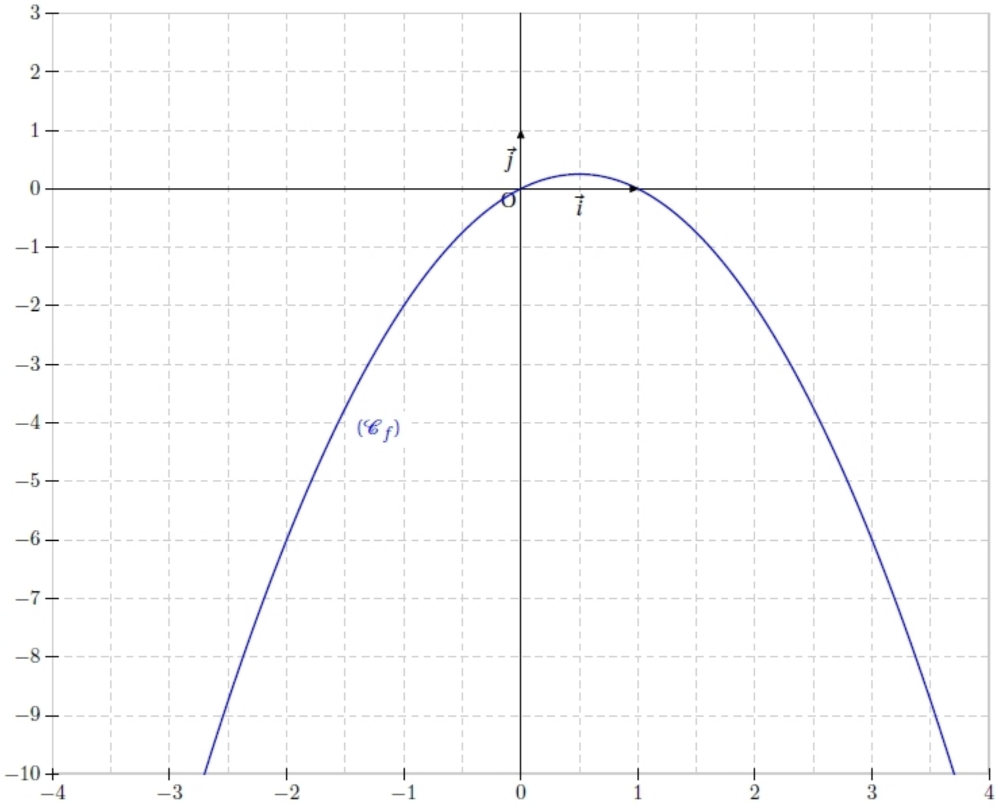
On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)\; sur\, \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}, \gamma x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$.

4. En déduire que f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.



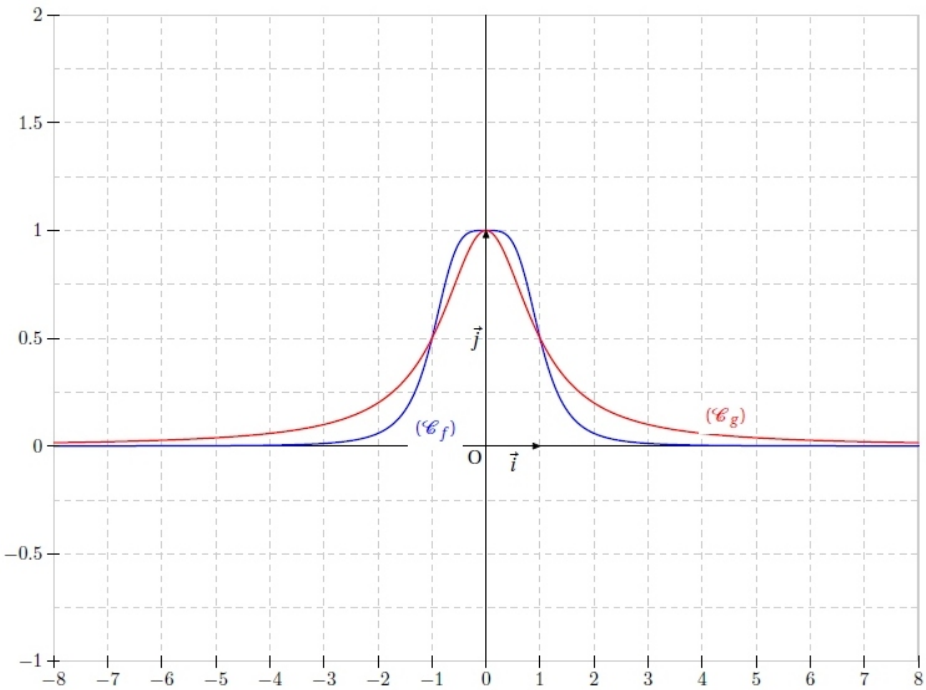
EXERCICE 3 - COMPARER DEUX FONCTIONS

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \; et \; g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Calculer $f(x) - g(x)$.

2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \geq g$.



EXERCICE 4 - COMPARAISON DE FONCTIONS

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies par :

$f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ sur l'intervalle [-1;+%5Cinfty[" />.

1. Montrer que $f(x) \geq, 0$ et $g(x) \geq, 0$ pour tout x appartenant à $[-1;+\infty[$.

2. Calculer $,(f(x),,)^2$ et $,(g(x),,)^2$.

3. Démontrer que $,(f(x),,)^2 \leq,,(g(x),,)^2$ pour tout x appartenant à $[-1;+\infty[$.

4. En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

5. Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

EXERCICE 5 - FONCTION COMPOSÉE

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Donner une formule explicite de la fonction fog lorsque :

1. $g(x) = \sqrt{x-1}\, sur\, [1;+\infty[$.

2. $g(x) = 1 - \frac{1}{x}\, sur\, \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 6 - PARITÉ

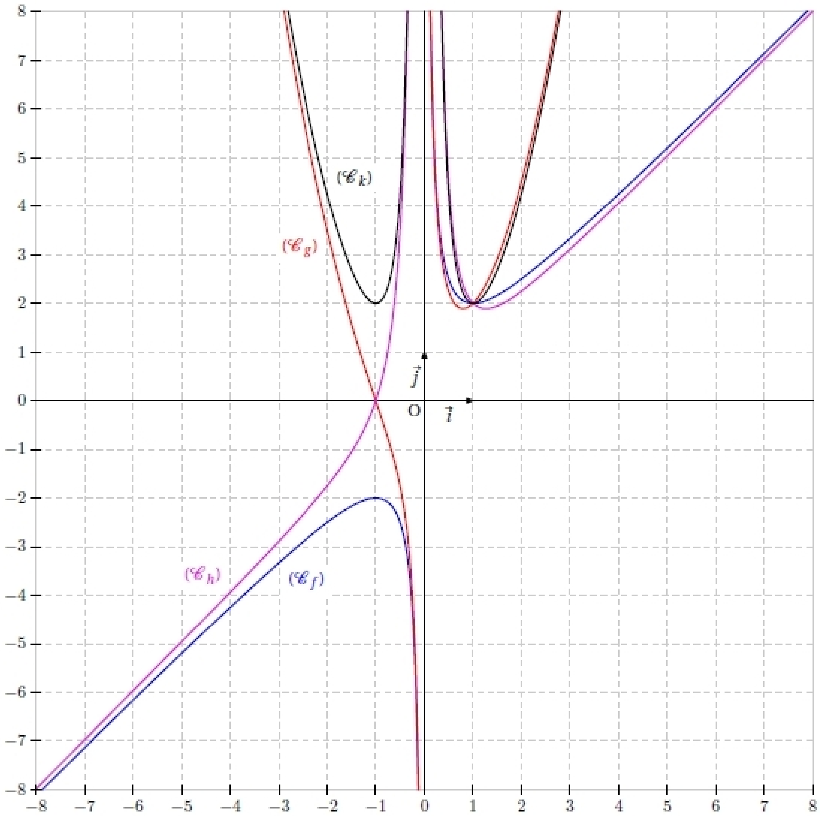
Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}\, sur\, \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x}\, sur\, \mathbb{R}^*$$

$$h(x) = x + \frac{1}{x^2}\, sur\, \mathbb{R}^*$$

$$k(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}\, sur\, \mathbb{R}^*$$



EXERCICE 7 - ETUDE DE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y =$.

EXERCICE 8

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 4x^3$.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-4x - 4}{x^2 + 2x + 5}.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A.

EXERCICE 10

Etudier les variations sur]-2 ; 1[de la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}$.

EXERCICE 11 - FORME CANONIQUE ET FACTORISÉE

Déterminer la forme canonique et factorisée de :

$f : x \mapsto 2x^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{5})x - 2\sqrt{15}$

EXERCICE 12 - ETUDE DE FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ

On note f et g deux fonctions polynômes du second degré, définies par :

$f : x, \mapsto, 2x^2, +2x - 4$ et $g : x, \mapsto, -(x+3)(x+2)$

On note C_f et C_g leur représentation graphique respectives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis celui de g.

2. Déterminer la forme canonique puis factorisée de $f(x)$.

3. Déterminer la forme développée puis canonique de $g(x)$.

4. Déterminer les coordonées des points d'intersection entre C_f et les axes du repère.

5. Déterminer les coordonées des points d'intersection entre C_g et les axes du repère.

6. Dresser le tableau de variation de f puis celui de g.

7. Décrire C_f puis C_g.

8. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre C_f et C_g.

9. Etudier la position relative entre les deux courbes C_f et C_g.

EXERCICE 13 - ETUDE D'UNE FONCTION INVERSE ET DE L'HYPERBOLE

f est la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

g est la fonction $x \mapsto -x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Dans un repère orthonormal (O, i, j), C et D sont les courbes représentant f et g.

1. Tracer les courbes C et D.

2. Démontrer que le point d'abscisse 1 de D appartient à C.

Trouver le second point d'intersection de ces courbes.

indication : Vérifier que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

3. Vérifier les coordonnées de ces points d'intersection sur le graphique.

4. Construire l'ensemble des points M(x; y) tels que $x^2 y^2 = 4$.

5. Un rectangle a pour aire 2 m² et pour périmètre 6m.

En utilisant le graphique précédent, trouver sa longueur et sa largeur.

EXERCICE 14 - ETUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.

2. Démontrer que f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier la parité de la fonction f.

4. Tracer soigneusement la représentation graphique Cf de la fonction f.

On se limitera à l'intervalle [- 3 ; 3].

5. Donner, par lecture graphique, la valeur du maximum de la fonction f sur :

a. l'intervalle [-1;1].

b. l'intervalle [-2;1].

6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq, 1$.

EXERCICE 15 - COMPARAISON DE FONCTIONS

Le but de cet exercice est de comparer les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

1. Montrer que $f(x) \geq, 0$ et $g(x) \geq, 0$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$.

2. Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$.

3. démontrer que $(f(x))^2, \leq, (g(x))^2$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$.

4. En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

5. Tracer sur un même repère les représentation graphique de f et g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

EXERCICE 16 - PARITÉ

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x)=x+\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

EXERCICE 17 - COMPOSÉE

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-1$ sur $\mathbb{R}$.

Donner une formule explicite de la fonction fog lorsque :

$g(x)=\sqrt{1-x}$ sur $]-\infty;1]$ puis $g(x)=1-\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 18 - COMPOSÉE DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{4x-1}$ sur $I=[\frac{1}{4};+\infty[$.

En considérant la fonction f comme la composée de fonctions de référence, préciser le sens de variations de f sur l'intervalle I.

EXERCICE 19 - SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION COMPOSÉE

On donne $f(x)=-3x+1$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.

On définit la fonction h définie sur $I=]-\infty;\frac{1}{3}[$ par $h=gof$..

1. Donner l'expression de $h(x)$.

2. Déterminer le sens de variation de h sur I .

EXERCICE 20 - ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION COMPOSÉE

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x)=x^2-1\,et\,g(x)=\frac{x+1}{x}$.

1. Calculer $gof(x)$.

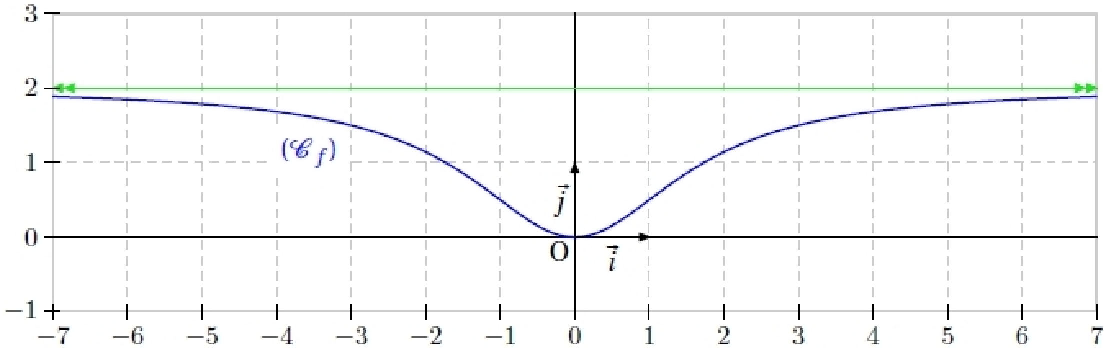
2. Quel est l'ensemble de définition de gof ?

EXERCICE 21 - FONCTION MAJORÉE

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+3}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2+3}$.

2. Montrer que f est majorée par 2.



EXERCICE 22 - FORME CANONIQUE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^2 - 12x + 21$

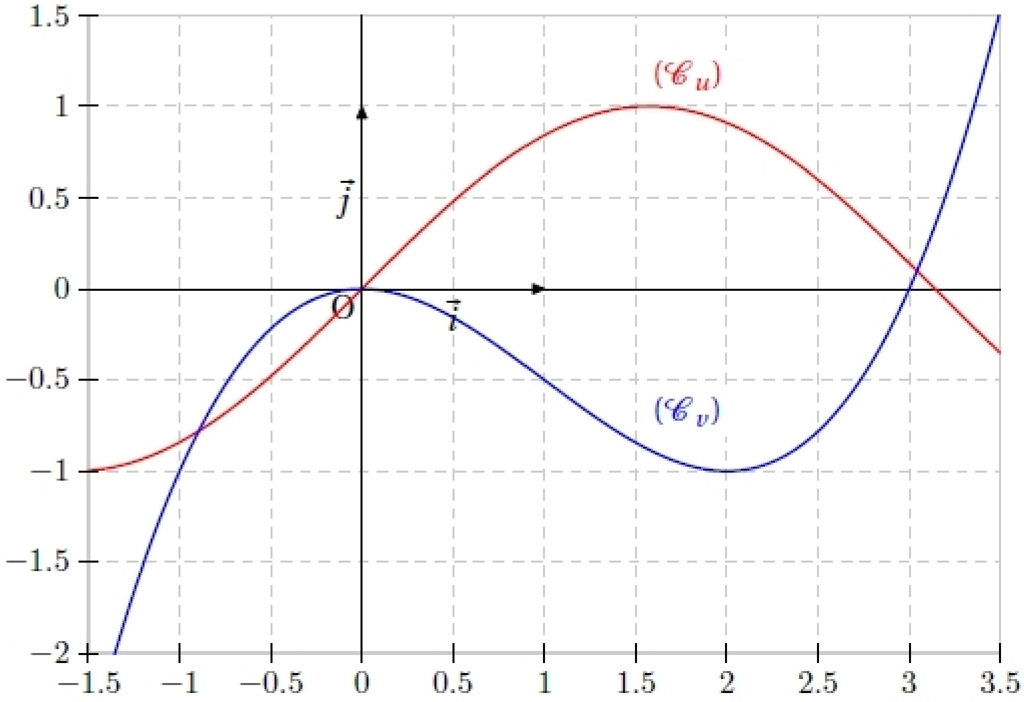
1. Déterminer la forme canonique de f.

2. Décrire la courbe de f .

EXERCICE 23 - TRACER LA COURBE DE LA SOMME DE DEUX FONCTIONS

u et v sont représentées ci-dessous.

Tracer sur ce graphique la courbe représentative de la fonction u + v.



EXERCICE 24 - EXPLOITATION D'UN TABLEAU DE VARIATION

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	-8		1		8
$f(x)$		↗	3	↘	

On donne f(- 2) = - 1 et f(2) = 0.
On définit les fonctions suivantes :

$h : x \mapsto f(x) + 2; r : x \mapsto f(x + 2); p : x \mapsto f(2x); g : x \mapsto 2f(x)$

1. Donner les valeurs de g (1), h (2), p (1) et r (- 1).

2. Etablir les tableaux de variations de h, r, p et g.

EXERCICE 25 - FONCTION RATIONNELLE

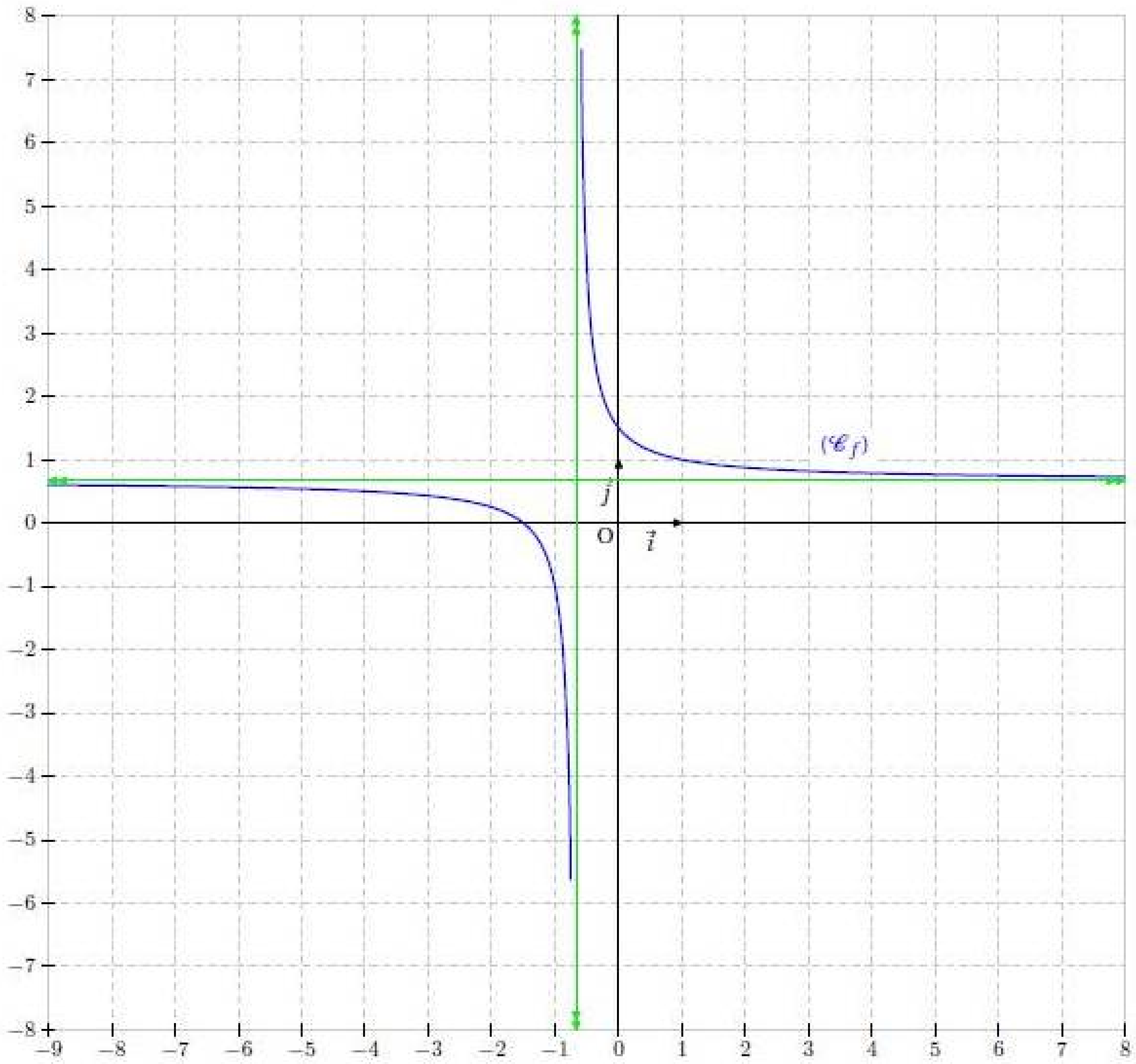
Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+2}$

1. Etudier les limites de f. Interpréter graphiquement.

2. Etudier les variations de f. Donner le tableau de variations complet.

3. Déterminer les éventuelles intersections de (Cf) avec l'axe des abscisses.



EXERCICE 26 - FONCTIONS COMPOSÉES COMMUTATIVES

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x.$

Démontrer que $fog = gof.$

EXERCICE 27 - COMPARAISON DE RACINES

Soient a, b dans $\mathbb{R}$.

1. Développer $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

2. Démontrer que $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.