Produit scalaire

EXERCICE N° 1:

Soient $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{Z}$.
Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$ dans les conditions suivantes :

a. AB=3 , AC=5 et $(\vec{AB}.\vec{AC}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

b. AB=1 , AC=4 et $(\vec{AB}.\vec{AC}) = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$.

c. AB=4 , AC=7 et $(\vec{AB}.\vec{AC}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

d. AB=2 , AC=2 et $(\vec{AB}.\vec{AC}) = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

EXERCICE N° 2 :

Calculer $\vec{AC}.\vec{AB}$; $\vec{CA}.\vec{BA}$; $\vec{BA}.\vec{AC}$; sachant que :

a. $\vec{AB}.\vec{AC} = -3$

b. $\vec{AB}.\vec{AC} = 2$

EXERCICE N° 3 :

MNPQ est un losange de centre O tel que MP=8 et NQ=6.
Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{MO}.\vec{MN}$; $\vec{PQ}.\vec{NQ}$; $\vec{PM}.\vec{NP}$; .

b. $\vec{MQ}.\vec{NP}$; $\vec{MN}.\vec{PQ}$; $\vec{OM}.\vec{NM}$;

EXERCICE N° 4 :

Soit ABCD un carré et I un point de [AB].
On note H le projeté orthogonal de A sur [ID].
En exprimant de deux manières différentes $\vec{IA}.\vec{ID}$, démontrer que :
$\vec{IA}.\vec{ID} = AI^2$

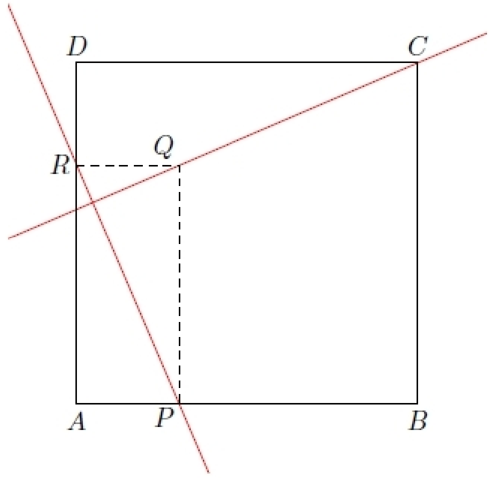
EXERCICE N° 5 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Calculer $\vec{BA}.\vec{AC}$ et $\vec{AB}.\vec{AH}$ en utilisant les projections orthogonales .

EXERCICE 6 - PRODUIT SCALAIRE DANS UN CARRÉ

Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR tel que :
- P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré ;
- AP = DR.

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.1. Justifier que :
$\vec{CQ}.\vec{PR} = \vec{CQ}.(\vec{AR} - \vec{AP})$ .2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



EXERCICE 7 - PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

On a $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}$. $\vec{v}$ = -1.

1) Calculez $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $\|(\vec{u}-\vec{v})^2\|$.

2) Calculer ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) . (2$\vec{u}$-3$\vec{v}$).

EXERCICE 8 - PRODUIT SCALAIRE ET POINT QUELCONQUE

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Démontrer que quelque soit le point M du plan, on a l'égalité :

$MA^2 - MB^2 = (\vec{MA} + \vec{MB}).\vec{BA} = 2\vec{MI}.\vec{BA}$.

EXERCICE 9 - LES VECTEURS DANS LE PLAN

Soit le parallélogramme ABCD tel que :

E est le milieu de [AD]

$\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

K est le dernier sommet du parallélogramme EAFK

M le milieu de [BE]

$\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{GB} = 2\vec{GF}$

$\vec{GC} = 2\vec{GK}$

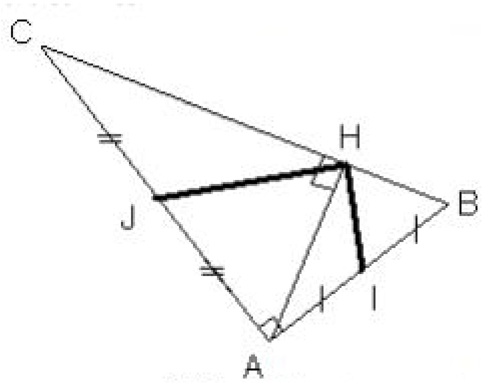
Montrer que vecteur $\vec{GK} = 2\vec{GM}$.

< EXERCICE 10 - PROJETÉ ORTHOGONAL

ABC est un triangle rectangle en A .

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC] .



Démontrer que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires .

EXERCICE 11 - CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES DANS UN PARALLÉLOGRAMME

ABCD est un parallélogramme avec AB = 4, AD = 5 et AC = 7.

1.Calculer $\vec{AB}.\vec{AD}$.

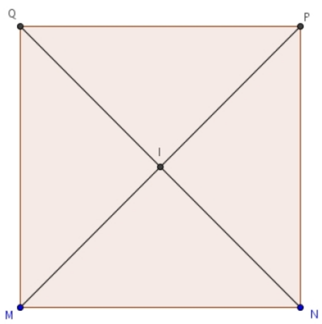
2. En déduire BD.

EXERCICE 12 - CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES DANS UN CARRÉS

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.y

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{MN}.\vec{QP}$.
2. $\vec{MN}.\vec{PN}$.
3. $\vec{IN}.\vec{IP}$.
4. $\vec{QI}.\vec{NI}$.

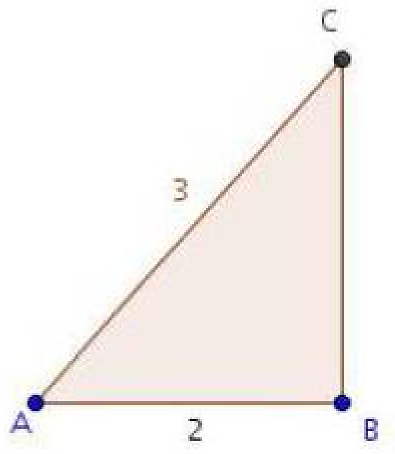


EXERCICE 13 - DÉTERMINER SI LE TRIANGLE EST RECTANGLE

ABC est un triangle dans lequel AB = 2 et AC = 3.

De plus $\vec{AB}.\vec{AC} = 4$

Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel sommet.



EXERCICE 14 - TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

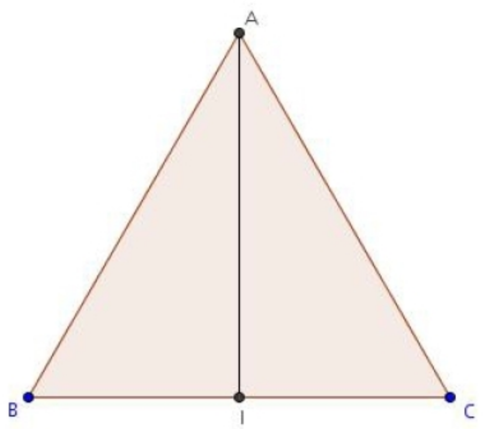
ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{BA}.\vec{BC}$.

2. $\vec{CA}.\vec{CI}$.

3. $(\vec{AB} - \vec{AC}).\vec{AI}$.



EXERCICE 15 - COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
on considère les points suivants : A (2 ; 1), B (7 ; 2) et C (3 ; 4).

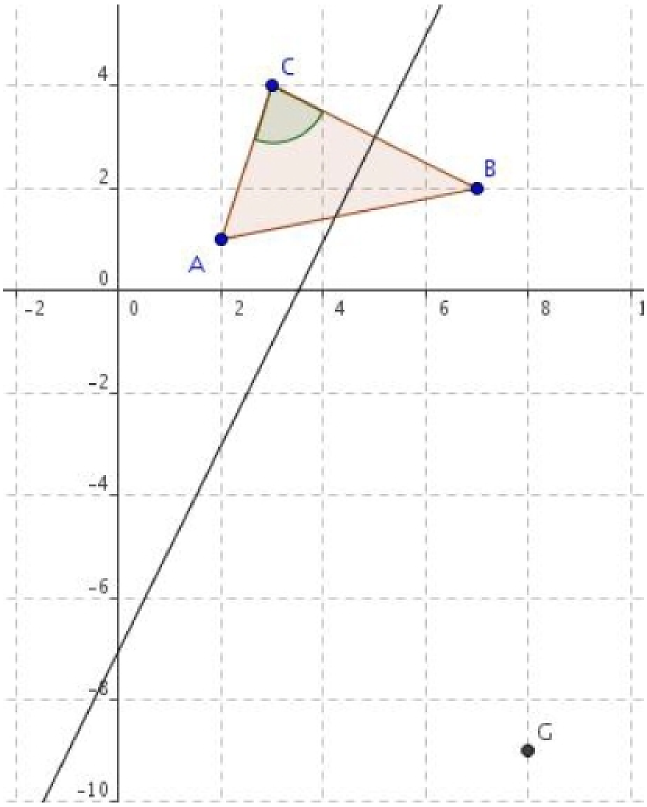
Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 3), (B ; 2) et (C ; - 4).

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [BC].

3. Calculer $\vec{CB}.\vec{CA}$.

4. L'angle $\widehat{C}$ est-il droit ?



EXERCICE 16 - COSINUS

Soit ABC un triangle.
Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$ et BC dans chacun des cas suivants :
1. AB= 6cm ; AC= 5 cm et $\widehat{BAC} = 60°$.
2. AB= 7 cm ; AC=4cm et $\widehat{BAC} = 120°$.

EXERCICE 17 - VECTEURS ORTHOGONAUX

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme .
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux .

EXERCICE 18 - TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

ABC est un triangle équilatéral de côté a .
H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
Exprimer en fonction de a, les produits scalaires suivants :
$\vec{AB}.\vec{AC}$; $\vec{AC}.\vec{CB}$; $\vec{AB}.\vec{AH}$; $\vec{AH}.\vec{BC}$; $\vec{OA}.\vec{OB}$.

EXERCICE 19 - CALCULS AVEC PRODUITS SCALAIRES

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $\vec{u}.\vec{v} = 13$.
Calculer les produits scalaires suivants :
1. $\vec{u}.(\vec{u}+3\vec{v})$.
2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2$.

EXERCICE 20 - CONDITION SUR DES POINTS

A quelle condition sur les points A, B et C a-t-on :

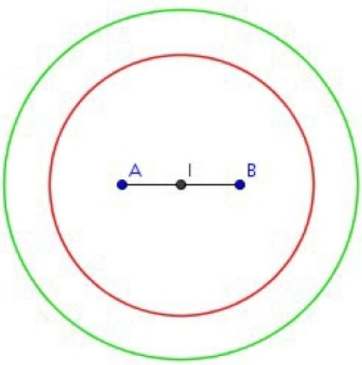
$$(\vec{AB}+\vec{AB})^2 = (AB+AC)^2$$

EXERCICE 21 - DÉTERMINER UN ENSEMBLE DE POINTS DU PLAN

On considère un segment [AB] tel que AB = 1 dm.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1. $\vec{MA}.\vec{MB} = 1.$
2. $MA^2 + MB^2 = 5.$



EXERCICE 22 - TROUVER UN ENSEMBLE DE POINTS

[AB] est un segment de milieu I et AB = 2 cm.
1. Montrer que pour tout point M du plan :
$MA^2 - MB^2 = 2\vec{IM}.\vec{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14.$

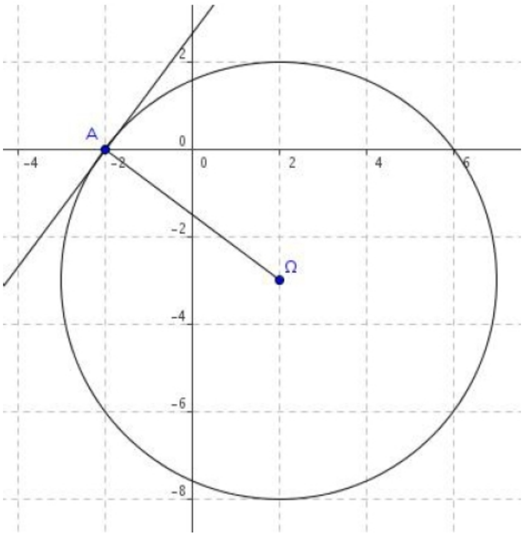
EXERCICE 23 - LES ÉGALITÉS VECTORIELLES DU PARALLÉLOGRAMME

Démontrer que :
1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}.\vec{v}$.
2. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
3. Quel est le lien avec le losange, le parallèlogramme ?
4. Démontrer que :
$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
5. En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

EXERCICE 24 - EQUATION D'UN CERCLE ET DE LA TANGENTE

Dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne un point $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle (C) de centre Ω et de rayon R = 5.
2. Démontrer que le point A(- 2 ; 0) est un point du cercle (C).
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C).

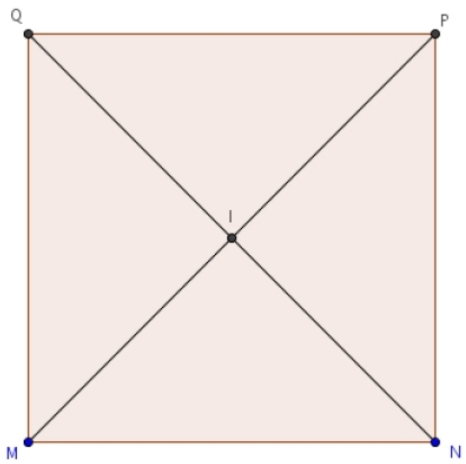


EXERCICE 25 - MÉDIATRICE ET HAUTEUR D'UN TRIANGLE

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{MN}.\vec{QP}$.
2. $\vec{MN}.\vec{PN}$.
3. $\vec{IN}.\vec{IP}$.
4. $\vec{QI}.\vec{NI}$.



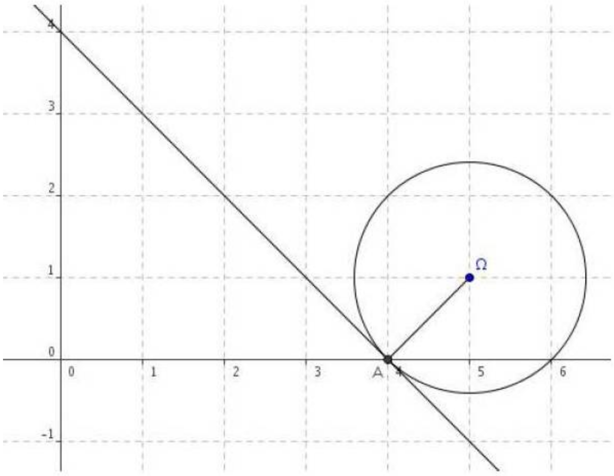
EXERCICE 26 - DISTANCE D'UN POINT À UN CERCLE

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5;1)$ tangent à la droite (D) d'équation :
$x+y-4=0$.

<u>Indication :</u>

on rappelle que la distance entre un point $A(\alpha;\beta)$ et une droite (D) d'équation ax + by + c = 0 est donnée par la formule :

$$d(A, D) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

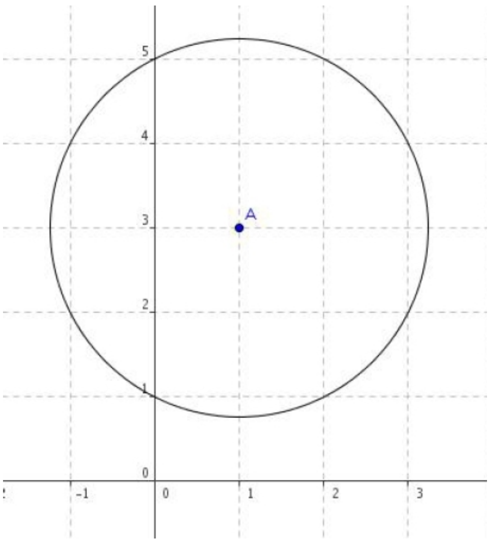


EXERCICE 27 - PRODUIT SCALAIRE ET CERCLE

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle.

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0.$
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0.$



EXERCICE 28 - PRODUIT SCALAIRE DANS UN TRIANGLE

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].
On donne : BC = 4, AI = 3 et $(\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{3}$.

Calculer :

1. $\vec{AB}.\vec{AC}$.

2. $AB^2 + AC^2$.
3. $AB^2 - AC^2$.
4. $AB\,et\,AC$.