COLLEGECATHOLIQUE BILINGUE DE LA RETRAITE DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES NIVEAU: TERMINALE D ET TI	Année scolaire : 2022/2023 Durée : 4h COEF: 4
EXAMEN DE FIN DE PREMIERE PERIODE	

L'épreuve comporte trois exercices d'évaluation des ressources et un problème d'intégration porté sur deux pages.

PARTIE A : Evaluation des ressources : 15 points

Exercice 1 : 5 points

I- On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $j^3 = 1$ et conclure. **1,5pt**

II- Pour tous nombres complexes z et $Z = \frac{z+i}{z-2i}$ on pose z = x +iy et Z = X + iY où X, Y, x, et y sont des réels.

1- Justifier que Z existe pour $x \neq 0$ et $y \neq 2$ **1pt**

2- Montrer que $X = \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y-2)^2}$ et $Y = \frac{3x}{x^2+(y-2)^2}$ **1,5pt**

3- Déterminer une relation qui lie x et y pour que Z soit imaginaire pur. **1pt**

Exercice 2: 5 points

Le polynôme complexe P est défini par : $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$

1-a) Calculer $P(i)$. et conclure **0,5pt**

b) Résoudre dans ℂ les équations $z^2 + 1 = 0$ et $z^2 - 2z + 5 = 0$. **1,5pt**

2-a) Pour tout nombre complexe montrer que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. **0,5pt**

b) En déduire que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P. **0,5pt**

c) En déduire que P est factorisable par $z^2 + 1$. **0,5pt**

3-a) Déterminer les nombres complexes α et β pour les quels $P(z) = (z^2+1)(z^2+\alpha z+\beta)$. **1pt**

b) En déduire toutes les racines de P. **0,5pt**

Exercice 3:*(série D uniquement)* **5 points**

I- On donne les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$. et $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Ecrire sous la forme algébrique $Z, \overline{Z}, -Z$ et $\frac{1}{Z}$ **2pts**

II- Choisir la ou les réponses justes.

1- On considère les nombres complexes $\alpha = 1 + 3i, \beta = 3 - i$ et $\gamma = 1 - 3i$.

$a)$ $|\alpha| = -|\beta|; b)$ $|\alpha| \neq |\beta|; c)$ $|\beta| > |\gamma|; d)$ $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ **1pt**

2- Soient les nombres complexes z et z'.

a) $|z + z'| = |z| + |z'|; b)$ $|zxz'| = |z|x|z'|; c)$ $|z + z'| \leq |z| + |z'|; d)$ $|z - z'| \leq |z| + |z'|$ **1pt**

III- Déterminer les racines carrées du nombre complexe i , **1pt**

Exercice 3:*(Série TI uniquement)* **5 points**

1) a) -Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5. **0,75pt**

b)- Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $3^{2n} + 2^{2n+2}$ est multiple de 5. **0,75pt**

2) On pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a) Démontrer que pour tout entier n, on a : $A_{n+3} \equiv A_n\ [7]$. **0,75pt**

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 7. **0,75pt**

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $\frac{2n-1}{n+2}$ soit un entier relátif. **1pt**

4)Démontrer que pour tout entier n les nombres $n^2 + 3n - 1$ et $n^2 - 2$ sont premiers entre eux. **1pt**

PARTIE B: Evaluation des compétences: 4,5 points

Un diplomate voyage avec trois valises numériques A, B et C. La valise A s'ouvre avec un chiffre qui est la racine réelle du polynôme complexe f défini par : $f(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$. La valise B s'ouvre avec un seul chiffre qui est la partie imaginaire de la solution imaginaire pure de l'équation f(z) =0. Et la valise C s'ouvre avec le nombre formé par la somme des modules des nombres complexes qui forment une solution du système complexe $\begin{cases} U \text{x} V = 24 + 7i \\ U + V = 7 + i \end{cases}$

1- Quel numéro ouvre la valise A ? **1,5pt**

2- Quel numéro ouvre la valise B ? **1,5pt**

3- Avec quel numéro s'ouvre la valise C ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt