GROUPE DE RÉPÉTITION EDUC SPEC ORG
CENTRE NATIONALE DE PREPARATION DES EXAMENS OFFICIELS
ENSEIGNEMENT GENERALE FRACOPHONE
Cours en ligne- cours de Répétition-cours à domicile- cours du soir
ORIENTATION-FORMATION-CONSEIL-REUSSITE
Direction General: Bafoussam-cameroun
Telephone (683663342) watshapps (697486809)

" Ne joue pas à l'intelligent "
EDUC SPEC ORG

DIRECTION ACADEMIQUE
******
SECRETARIAT DES EXAMENS
******

ACADEMIC DEPARTMENT
******
EXAMINATION SECRETARIAT
******

CONTROLE CONTINU N°1

CLASSE : Terminale C et D	DUREE : 02H	COEF : 07/04	SESSION : 05 Octobre 2024

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Consigne : L'épreuve est étalée sur une page et est note sur 20 points

Exercice 1 : Raisonnement par récurrence sur $\mathbb{N}$ (10 points)

1- Démontrer par récurrence que pout tout entier $n \geq 1$, on a : **2 points × 3 = 6 points**

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(b) $10^n - 1$ est un multiple de de 9.

(c) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = [(n-1) \cdot 2^n] + 1$.

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, on a : $2^n > 5(n+1)$.**2 points**

3- Soit la suite (U_n) definie par $U_0 = -\frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{5U_n+6}{U_n+4}$

(a) Démontrer par récurrence que $\forall n \epsilon \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq U_n < 3$. **1,5 point**

(b) En posant par $\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$, déterminer le réel l vérifiant $f(l) = l$. **1,5 point**

Exercice 2 : Fonctions numériques à variable réelle (09 points)

1- Déterminer les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ pour que la fonction h définie par :

$$\boldsymbol{h(x)} = \begin{cases} h(x) = x^2 + ax - 1 \ \ \boldsymbol{si\ x \leq -1} \\ h(x) = 2x - 1 \ \ \boldsymbol{si -1 < x \leq 1} \\ h(x) = (x-b)^2 \ \ \boldsymbol{si\ x > 1} \end{cases}$$

soit continue en -1 et 1. **3 points**

2- Soit la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2 + \sin x}{x}$.

(a) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$. **1 point**

(b) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$:$\frac{x^2-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{x}$. **2 points**

(c) Calculer alors la limite de $\boldsymbol{f}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. **2 points**

(d) Montrer que la courbe de la fonction $\boldsymbol{f}$ admet une asymptote oblique $(\boldsymbol{d})$ d'équation $\boldsymbol{y = x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. **1 point**

Examinateur : MANGADOU WILFRIED

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Contrôle Continu N°1 - Terminale C, D

Proposé Par : MANGADOU WILFRIED

68045 3857

Exercice 1 : Raisonnement par récurrence sur $\mathbb{N}$

1- Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, On a :

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$: 2pts

Soit la proposition P_n : « $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ »

* Montrons que P_n est vraie au rang $n=1$.

On a : $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$.

D'où, P_n est vraie pour $n=1$.

* Supposons que pour $n \geq 1$, P_n est vraie c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ et montrons que P_{n+1} l'est aussi c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{K=1}^{n} K(K+1) + (n+1)(n+2)$

or d'après l'H.R, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)\times 3}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)[n+3)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

D'où, P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1 ; \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b) $10^n - 1$ est un multiple de 9 : 2pts

Soit la proposition M_n : << $10^n - 1$ est un multiple de 9 ; $\forall n \geq 1$ >>.

* Montrons que M_n est vraie pour $n = 1$.

On a : $10^1 - 1 = 9$. or 9 est un multiple de 9

D'où, M_n est vraie pour $n = 1$.

* Supposons que M_n soit vraie pour tout $n \geq 1$ c'est à dire que $10^n - 1 = 9k$ ($k \in \mathbb{N}$) et montrons que M_{n+1} l'est aussi c'est à dire que $10^{n+1} - 1 = 9k'$ (avec $k' \in \mathbb{N}$).

On a : $10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1$

or d'après l'H.R, $10^n - 1 = 9k \Leftrightarrow 10^n = 9k + 1$.

D'où, $10^{n+1}-1=(9k+1)\times 10-1$

$= 90k+10-1$

$= 90k+9$

$= 9(10k+1)$

$= 9k'$ (avec $k'=10k+1$; $k\in\mathbb{N}$).

Donc, M_{n+1} est aussi vraie.

<u>Conclusion :</u> $\forall n\geq 1$; 10^n-1 est un multiple de 9.

(C) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=[(n-1)\cdot 2^n]+1$: 2pts

Soit la proposition S_n : « $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=[(n-1)2^n]+1$; »

* Montrons que S_n est vraie pour $n=1$:

On a : $\sum_{k=1}^{1} k\cdot 2^{k-1}=1\cdot 2^{1-1}=1\times 2^0=1$ et

$[(1-1)2^1]+1=1$. D'où, S_n est vraie pour $n=1$.

* Supposons que pour tout $n\geq 1$, S_n soit vraie c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=[(n-1)\cdot 2^n]+1$ et montrons que S_{n+1} l'est aussi c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^{k-1}=[n\cdot 2^{n+1}]+1$.

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}+[(n+1)\cdot 2^n]$

$=[(n-1)\cdot 2^n]+1+[(n+1)\cdot 2^n]$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = [(n-1+n+1) \cdot 2^n] + 1$

$= [(2n) \cdot 2^n] + 1 = (n \cdot 2 \cdot 2^n) + 1$

$= (n \cdot 2^{n+1}) + 1$

D'où, S_{n+1} l'est aussi.

Conclusion : Pout tout $n \geq 1$; $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = [(n-1) \cdot 2^n] + 1$

2- Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 5$, On a : $2^n > 5(n+1)$.

2pts

Soit la proposition t_n : « $2^n > 5(n+1)$; $\forall n \geq 5$

* Montrons que t_n est vraie pour $n = 5$:

On a : $2^5 = 32$ et $5(5+1) = 30$ or $32 > 30$.

D'où, t_n est vraie pour $n = 5$.

* Supposons que t_n soit vraie pour $n \geq 5$.

C'est à dire que $2^n > 5(n+1)$ et montrons que t_{n+1} l'est aussi c'est à dire que $2^{n+1} > 5(n+2)$

On a ~~...~~ d'après l'H.R ;

$2^n > 5(n+1) \Leftrightarrow 2^n \times 2 > 5(n+1) \times 2$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} > 10(n+1)$ (I)

• Etudions le signe de $10(n+1) - 5(n+2)$

$10(n+1) - 5(n+2) = 10n + 10 - 5n - 10 = 5n$.

or $n \geq 5 \Leftrightarrow 5n \geq 25 \Leftrightarrow 5n > 0$

D'où, $5n > 0 \Leftrightarrow 10(n+1) - 5(n+2) > 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{10(n+1) > 5(n+2)}}$ (II)

• d'après (I), on a : $2^{n+1} > 10(n+1)$ or (II) donne $10(n+1) > 5(n+2)$.

Ainsi, $2^{n+1} > 10(n+1) > 5(n+2)$ c'est à dire que $\boxed{2^{n+1} > 5(n+2)}$. ✓

Donc, t_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion :</u> $\forall n \geq 5$; $2^n > 5(n+1)$.

3- Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+6}{U_n+4} \end{cases}$.

ⓐ <u>Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq U_n < 3$:</u> (1,5pt)

Soit la proposition M_n : « $-\frac{1}{2} \leq U_n < 3$ ».

* Montrons que M_n est vraie pour $n=0$:

On a : $U_0 = -\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} < 3$.

D'où, M_n est vraie pour $n=0$.

* Supposons que M_n soit vraie c'est à dire que $-\frac{1}{2} \leq U_n < 3$ et montrons que U_{n+1} l'est aussi c'est à dire que $-\frac{1}{2} \leq U_{n+1} < 3$.

D'après l'hypothèse de récurrence (H.R), on a:

$-\frac{1}{2} \leq U_n < 3 \Leftrightarrow \cancel{-} -5/2 \leq 5U_n < 15$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq 5U_n+6 < 21$ (I).

- De plus, $-\frac{1}{2} \leq U_n < 3 \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq U_n+4 < 7$ (II)

On a alors $\frac{(I)}{(II)} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{5U_n+6}{U_n+4} < \frac{21}{7}$

$\Leftrightarrow 1 \leq U_{n+1} < 3$ or $-\frac{1}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_{n+1} < 3$

D'où, M_{n+1} est Vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N};\ -\frac{1}{2} \leq U_n < 3$

b) En posant par $U_{n+1} = f(U_n)$, déterminons le réel ℓ vérifiant l'équation $f(\ell) = \ell$:

- $U_{n+1} = f(U_n) \Leftrightarrow f(U_n) = \frac{5U_n+6}{U_n+4}$.

D'où, $f(\ell) = \frac{5\ell+6}{\ell+4}$.

- Ainsi, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{5\ell+6}{\ell+4} = \ell$ 1,5pt

$\Leftrightarrow \ell^2 + 4\ell = 5\ell + 6$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell^2 - \ell - 6 = 0}$ ✓

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$.

D'où, $\ell_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $\ell_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

or $-\frac{1}{2} \leq l < 3$ car $-\frac{1}{2} \leq U_n < 3$

Donc, $\boxed{l = 3 \text{ est le réel cherché}}$ ✓

Exercice 2 : Fonctions numériques à variable réelle

1- Déterminons les réels a et b pour que la fonction h soit continue en -1 et 1

3pts

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-b)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

N.B : La fonction h est continue en -1 si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$.

De même pour la valeur 1.

On a :

* $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + ax - 1) = -a$; et

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x - 1) = -3$

* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 1) = 1$; et

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - b)^2 = (1 - b)^2$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} -a = -3 \\ \\ 1 = (1-b)^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 3 \\ 1-b = \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ 1-b = 1 \text{ ou } 1-b = -1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \text{ ou } b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$.

Donc, $\boxed{a = 3 \text{ et } b = 0 \quad \text{ou} \quad a = 3 \text{ et } b = 2}$ ✓

2- Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+\sin x}{x}$.

(a) Justifions que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$: 1pt

• $f(x)\,\exists$ si et seulement si $x \neq 0$

D'où, $\boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

b) Démontrons que pour $\forall x \neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2+1}{x}$

• On sait que : $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\iff x^2-1 \leq x^2+\sin x \leq x^2+1$

$\iff \dfrac{x^2-1}{x} \leq \dfrac{x^2+\sin x}{x} \leq \dfrac{x^2+1}{x}$ 2pts

Donc, $\boxed{\dfrac{x^2-1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2+1}{x}}$.

(C) Calculons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

2pts

. D'après la question précédente,

$$\frac{x^2-1}{x} \le f(x) \le \frac{x^2+1}{x}.$$

Donc, • d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

Car, $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1} = -\infty$

$$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Car, $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc, $\boxed{\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

(d) Montrons que la Courbe de f admet une asymptote oblique (d) d'équation $y = x$ en $-\infty$ et en $+\infty$:

- Il suffit de ~~Calculer ici~~ montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

- On a d'après la question (b) :

$$\frac{x^2-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{x}$$

1pt

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} - x \leq f(x) - x \leq \frac{x^2+1}{x} - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{x}$$

- En utilisant le théorème des gendarmes on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$, alors la Courbe de f admet une asymptote oblique (d) : $y = x$.