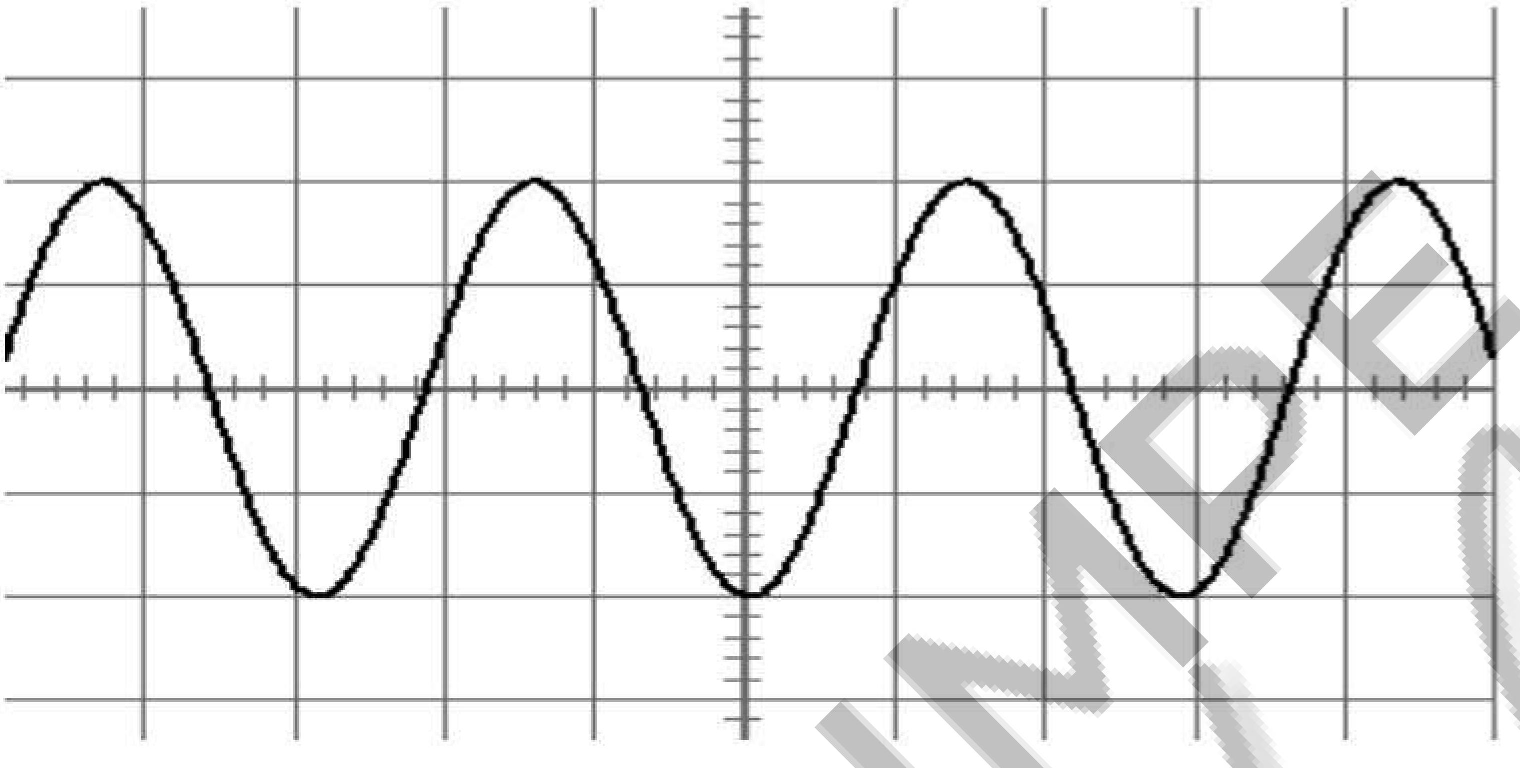
TD NUMERO 9 : Systèmes mécaniques oscillants

On prendra : g = 9,8 m.s^{-2}.

EXERCICE 1 : Caractéristiques des oscillations.

Le document ci-dessous représente l'enregistrement des oscillations d'un pendule élastique horizontal (raideur k, masse m = 412 g).



Echelles : 1 carreau pour 5cm ; 1 carreau pour 0,5 s.

1. Déterminer :
   a) la période propre et la fréquence de cet oscillateur ;
   b) l'amplitude des oscillations ;
   c) la valeur de la raideur k du ressort ;
   d) l'énergie mécanique ;
   e) la valeur maximale de la vitesse.
2. Pour une élongation x =7,5 cm, calculer la valeur de la vitesse.
3. Etablir l'équation horaire du mouvement.
4. Représenter, sur un même graphique, les variations en fonction de l'élongation x :
   a) de l'énergie potentielle ;
   b) de l'énergie mécanique ;
   c) de l'énergie cinétique.
5. Représenter, sur un même graphique, les variations en fonction du temps :
   a) de l'énergie potentielle ;
   b) de l'énergie mécanique ;
   c) de l'énergie cinétique.

EXERCICE 2 : Association de ressorts, verticalement.

On dispose d'un ressort R_1 à spires on jointives de raideur k_1 = 5 N/m et de masse négligeable. On néglige les frottements.

1. Un solide ponctuel S de masse m = 0,5 kg est fixé à l'extrémité libre du ressort R_1 suspendu à un support fixe. On tire le solide vers le bas de a = 5 cm et on l'abandonne sans vitesse initiale. Etablir l'expression de la période T_1 de son mouvement et la calculer numériquement.
   Ecrire l'équation horaire du mouvement.
2. On accroche à l'extrémité libre du ressort R_1 un ressort R_2 de raideur k_2 et de masse négligeable. A l'extrémité libre de R_2 est fixé le solide de masse m.
   2.1. Etudier l'équilibre du solide S, puis établir l'équation différentielle du mouvement.

2.2. Exprimer la période propre T des oscillations du solide.En déduire que l'ensemble des deux ressorts associés est équivalent à un ressort unique de raideur k que l'on exprimera en fonction de k_1 et k_2.

2.3. Vérifier que si $k_1 = k_2$, on a : $T = T_1\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 : Oscillateur élastique.

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de constante de raideur k = 50 N/m et de longueur à vide ℓ_0 = 32 cm. Lorsqu'il est placé verticalement dans le champ de pesanteur, sa longueur devient ℓ = 35 cm. On prendra g = 10 N/kg et $\pi^2 = 10$.

1. Interpréter cette observation et en déduire la masse M de ce ressort.
2. Un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m, peut coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale (AB). Il est relié à l'une des extrémités du ressort précédent ; l'autre extrémité du ressort est fixée à un support. A l'équilibre, G est en O, origine du repère associé à la tige $(O, \vec{i})$.

A la date t = 0, on écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

On rappelle l'énergie cinétique E_{CR} d'un ressort de masse M dont une extrémité est fixe et l'autre animée d'une vitesse $\dot{x}$ à la date t : $E_{C_R} = \frac{1}{6}M\dot{x}^2$. L'état de référence de l'énergie potentielle est pris à la position d'équilibre.

2.1. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système ressort – solide – Terre à la date t, en fonction de m, M, k, x et $\dot{x}$.

2.2. En remarquant que l'énergie mécanique reste constante, établir l'équation différentielle du mouvement.

2.3. En déduire la nature du mouvement et montrer que la période propre T des oscillations est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{3}}{k}}.$$

3. Avec le dispositif précédent, on mesure la durée de 10 oscillations avec des masses croissantes du solide (S). On obtient les résultats suivants :

m(g)	200	300	500	600	800
t(s)	4,450	5,250	6,600	7,150	8,200
T(s)					
$\frac{kT^2}{4\pi^2}$					

3.1. Compléter le tableau.

3.2. On pose y = $\frac{kT^2}{4\pi^2}$.Tracer la courbe y = f(m). Echelle : 2 cm pour 0,1 kg en abscisses ; 1 cm pour 0,05 kg en ordonnées.

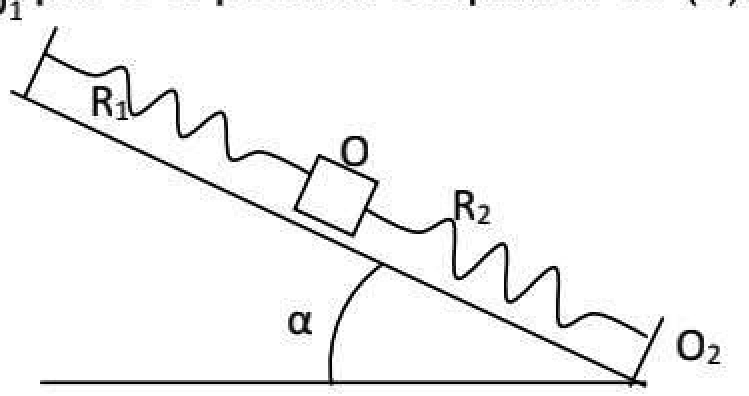
3.3. Montrer qu'on peut écrire : $y = Am + \mathbf{B}$, où A et B sont des constantes à déterminer.

3.4. Comparer B et la masse M du ressort et en ; en déduire une expression de la période T des oscillations en fonction de m, M et k. Conclure.

EXERCICE 4 : Association de deux ressorts.

Un solide (S) de masse m = 500 g et de dimensions négligeables, mobile sur une table à coussin d'air, est relié à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masses négligeables, tendus entre deux points fixes O_1 et O_2.La longueur à vide des ressorts est ℓ_0 = 20 cm et ils s'allongent de 2 cm sous l'action d'une force de valeur 1 N.

La distance O_1O_2 est de 53,1 cm. La table est inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. On désigne par O la position d'équilibre de (S).



1. Les frottements sont supposés négligeables.
   1.1. Calculer la valeur de l'allongement de chaque ressort à l'équilibre.
   1.2. On écarte le mobile de sa position d'équilibre de b = 5 cm vers O_2, dans la direction O_1O_2 et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il prend alors un mouvement oscillatoire. Pendant le mouvement, les axes des ressorts demeurent parallèles à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

      1.2.1. Déterminer l'énergie mécanique du système (ressorts + solide S + Terre) à un instant t pendant les oscillations. On prendra l'énergie potentielle nulle au point O.
      En déduire l'équation différentielle du mouvement de (S).
      Calculer la pulsation propre ω_0 et la période de ce mouvement
      1.2.2. Sachant qu'à la date t = 0, G est à 3 cm de sa position d'équilibre vers O_1 et se déplace vers O_2, donner l'expression qui permet de situer (S) à chaque instant.
      1.2.3. Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la relation fondamentale de la dynamique.
2. En réalité, il existe des frottements. On admet qu'ils peuvent représentés par une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, h étant une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de (S).
   2.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du mobile.
   2.2. Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure des courbes représentant l'abscisse x de G en fonction du temps suivant l'importance des frottements.
3. On applique au mobile une force de direction O_1O_2, sinusoïdale, d'amplitude A et de pulsation ω variable. Le mobile ayant toujours un mouvement avec frottement, expliquer le phénomène observé lorsque ω partant d'une valeur très faible, croît régulièrement jusqu'à dépasser ω_0.

EXERCICE 5 : Pendule de torsion.

Un fil de torsion vertical AB, de constante de torsion C et de longueur, est fixé à son extrémité supérieure A. En B, on accroche, par son milieu O, une tige métallique (t) perpendiculairement à AB.On écarte la tige(t) de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{4}$ rad, le fil étant maintenu vertical, et l'on abandonne sans vitesse initiale. On constate alors que 20 oscillations ont une durée de 14,8 s. On néglige les frottements.

1. Etablir la nature du mouvement de la tige et exprimer la période propre T_0 des oscillations en fonction du moment d'inertie J_0 de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil, et de C.Ecrire l'équation horaire de ce mouvement.
2. On fixe sur la tige (t) deux surcharges identiques (S_1) et (S_2), supposées ponctuelles, symétriquement par rapport à O. La masse de chacune des surcharges est m = 25,6 g et $OS_1 = OS_2 = b = 10$ cm.

2.1. Exprimer la nouvelle période T_0' des oscillations du pendule en fonction de J_0, C, m et b.
2.2. Exprimer J_0 et C en fonction de T_0, T_0', m et b.Calculer J_0 et C sachant que la durée de 20 oscillations de période T_0' est de 35 s.

3. La tige est maintenue à la distance AO = x sur le fil dont les extrémités A et B sont fixées. Les surcharges (S_1) et (S_2) sont toujours placées comme précédemment et le fil est vertical. On pose : AB = ℓ .

3-1) Exprimer la période T des oscillations du pendule ainsi constitué en fonction de T_0', ℓ et x.
On rappelle que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur, c'est-à-dire $C_i\ell_i = Cte$.

3-2) Pour quelle valeur de x la période T est –elle maximale ? Quelle est alors la valeur de T ?

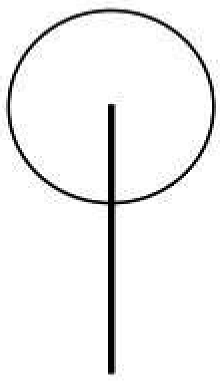
3-3) L'amplitude du mouvement étant de $\theta_m = \frac{\pi}{4}$ rad, déterminer la vitesse linéaire de (S_1) au passage de la tige par sa position d'équilibre pour $x = \frac{\ell}{2}$

EXERCICE 6 : Pendule pesant.

Un pendule pesant est constitué d'un disque (D) homogène solidaire d'une tige (OA) de longueur ℓ dont l'extrémité porte une bille (B) de masse m assimilable à un point matériel.

La masse de la tige est égale à celle de la bille.Le disque a une masse M = 2m et un rayon $r = \frac{\ell}{3}$.Le pendule peut osciller autour d'un axe (Δ) horizontal, perpendiculaire en O (centre du disque) au plan du disque. On néglige les frottements.

1. Montrer que le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est : $J_\Delta = \frac{13}{9} m\ell^2$.



2.1. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable d'un très petit angle θ_0 et lâché sans vitesse initiale. Montrer que le mouvement de ce pendule est sinusoïdal et exprimer la période propre des oscillations en fonction de g et ℓ .

2.2. Exprimer la longueur du pendule synchrone de ce pendule pesant en fonction de ℓ .

2.3. Quelle est la vitesse angulaire du pendule pesant au passage par la position d'équilibre si $\theta_0 = 0{,}1$ rad et $\ell = 0{,}2$ m ?

2.4. Montrer que l'énergie mécanique du système pendule pesant – Terre reste constante. Exprimer sa valeur en fonction de m, g, ℓ et θ_0.

3. On écarte maintenant le pendule pesant de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ rad et on lâche sans vitesse initiale ; $\ell = 0{,}2$ m.

3.1. Calculer sa vitesse angulaire au passage par la position d'équilibre. En déduire la vitesse v_0 de la bille (B).

3.2. Au passage par la position d'équilibre, la bille (B) heurte une autre bille (B') de même masse m initialement immobile. On admettra que les vitesses des deux billes immédiatement après le choc sont colinéaires à $\vec{v}_0$. Déterminer les valeurs v_B et $v'_{B'}$ des vitesses des deux billes (B) et(B') immédiatement après le choc supposé élastique.

EXERCICE 7 : Pendule simple.

On constitue un pendule simple en accrochant une sphère métallique ponctuelle (S) de masse m = 2.5 g à l'extrémité libre d'un fil vertical, inextensible, de masse négligeable et de longueur ℓ = 25 cm. Ce pendule peut osciller sans frottement autour d'un axe horizontal passant par le point de suspension O du fil.On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable, fil tendu, d'un angle θ_0, à la date t = 0, et le solide est lancé avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire au fil.On repère la position du pendule à la date t par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

1. On prend pour niveau de référence de l'énergie potentielle le plan horizontal passant par la position d'équilibre stable G_0 de (S).

1.1. Exprimer l'énergie mécanique du système (pendule simple – Terre) à la date t, en fonction de m, g, θ, v et ℓ , à la date t.

1.2. En remarquant que le système est conservatif, exprimer la valeur v de la vitesse du solide à la date t, en fonction de θ, θ, g, ℓ et v_0.

1.3. Exprimer la valeur de la tenson du fil à la date t, en fonction de m, g, θ, θ_0, v_0 et ℓ.

1.4. Quelle doit être la valeur minimale de v_0 pour que le solide fasse un tour complet ?

2. Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule dans le cas d'oscillations quelconques.

3. Montrer que dans le cas d'oscillations de faible amplitude, le pendule simple est un oscillateur harmonique. Donner alors la valeur de sa période propre T_0.

4. La sphère S est électrisée et porte une charge électrique q. Le pendule est placé entre deux armatures métalliques planes et horizontales, entre lesquelles règne un champ électrique uniforme vertical $\vec{E}$ dirigé de haut en bas et de valeur $E = 2{,}45 \cdot 10^4$ V.m^{-1}.

4.1. La nouvelle période des oscillations de faible amplitude est légèrement supérieure à T_0. En déduire le signe de la charge q.

4.2. On donne : $T = 1{,}02\ T_0$; que vaut la charge q ?

EXERCICE 8 : Tôle ondulée.

Le châssis d'une moto s'abaisse de 2 cm pour une charge de 90 kg posée sur le siège.

Cette moto et son pilote, de masse totale 300 kg, se déplace sur une piste ondulée. La cote z d'un point de la piste est liée à l'abscisse x, comptée parallèlement au déplacement, par : $z = 0{,}1\sin\frac{\pi . x}{3}$, x et z en mètres.

Evaluer la vitesse critique de la moto, en supposant que l'amortissement n'est pas très important.

EXERCICE 9 : Tôle ondulée du désert.

En soufflant, le vent crée sur le sable du désert une succession de creux et de bosses : la surface du sable prend alors l'aspect de la « tôle ondulée »

une voiture roule sur cette « tôle ondulée ». elle est assimilée à un pendule élastique de masse m = 1200 kg, associée à un ressort dont la constante de raideur est K = N.m^{-1}.

1)Dans un premier temps, on suppose que l'amortissement de l'automobile est très faible. Dans ce cas, la fréquence de résonance est considérer comme égale à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur non amorti que constitue l'automobile. la distance d = 1,65 m entre deux bosses sur le sable est supposée constante. calculer la vitesse v_1 à laquelle il faut éviter de rouler si l'on ne veut pas disloquer l'automobile après quelques kilomètres.

2)En réalité, l'automobile possède des amortisseurs qui amortissent les oscillations verticales. La fréquence de résonance N est alors inférieure à N_0 telle que $\frac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}23$. Calculer la vitesse v_2 à laquelle il faut éviter de rouler.

EXERCICE 10 : oscillateur complexe.

Une tige homogène OB de masse M = 5,2 kg et de longueur L = 1 m est munie d'un pivot à une extrémité et son autre extrémité est reliée à un ressort vertical, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k = 250 N.m^{-1}. On néglige les frottements.

A l'équilibre (fig.2), la tige est horizontale et l'allongement du ressort est $\Delta\ell$.

1) Exprimer $\Delta\ell$ en fonction de M, g et k.

2)On écarte la tige d'un petit angle $\theta_0 = 0{,}1$ rad par rapport à l'horizontale, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à la date t = 0. Des oscillations prennent alors naissance, l'axe du ressort demeurant vertical (fig.3).

2-1) Etablir, à partir d'une étude dynamique, l'équation différentielle du mouvement de la tige.

2-2) Ecrire la loi horaire de ce mouvement.

2-3) On prend pour niveau de référence des énergies potentielles la position d'équilibre du système.

2-4) Exprimer l'énergie mécanique du système (tige – Terre – ressort) à la date t pendant les oscillations.

2-5) En déduire la valeur de la vitesse angulaire de la tige au passage par la position d'équilibre.

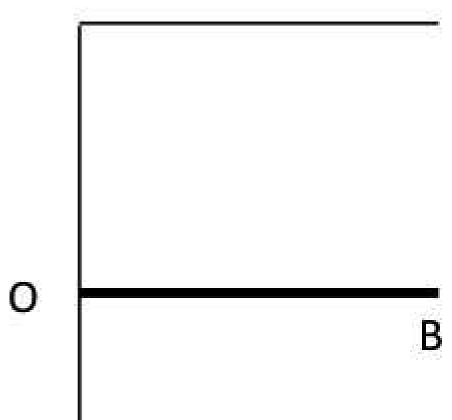


Fig.1

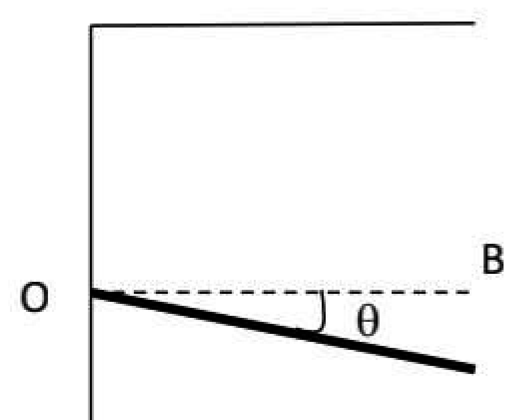


Fig.2

Exercice 11 : pendule élastique vertical

Entre deux points A et B, situés sur la même verticale, sont tendus deux ressorts identiques de longueur à vide l_0, de raideur k ; ils soutiennent un disque d'épaisseur négligeable de masse m = 100 g .Le disque est placé entre les deux ressorts et les frottements sont négligeables. Données: g = 10 m/s² ; k = 20 N/m, l_0 = 15 m, AB = 45 cm.

1) Déterminer la distance AD lorsque le disque est à l'équilibre.

2) Le disque est lancé vers le bas (sens négatif), à partir de sa position d'équilibre à la vitesse v_0 = 1 m/s, à la date t = 0.

2-1) Montrer qu'il effectue des oscillations harmoniques et calculer sa période propre.

2-2) Ecrire la loi horaire de cet oscillateur.

<u>**EXERCICE 12**</u> **: Oscillations d'un pendule simple sur une table incliné**

On constitue un pendule simple en accrochant une boule ponctuelle de de masse m= 100g à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L= 50cm. Le pendule est déposé sur une table incliné d'un angle $\boldsymbol{\alpha = 30°}$ sur l'horizontale. A l'équilibre le fil est parallèle à une ligne de plus grande pente et la boule est en O . On admet que la bille reste en contact avec la table lors de son mouvement et on néglige les frottements. g=9,8 m/s^2.

1) Déterminer les valeurs de la tension Te du fil et de la réaction R du plan lorsque le solide est en équilibre. 2) On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\boldsymbol{\theta_0 = 10°}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On repère la position du pendule à une date quelconque t par l'angle **Θ** que fait le fil avec une ligne de plus grande pente.

2-1) Le plan horizontal passant par O est prise comme référence des énergies potentielles de pesanteur. Exprimer en fonction de m , g , L, α, θ et $\dot{\theta}$ l'énergie mécanique du système terre pendule à la date t.

2-2) Etablir par une méthode énergétique l'équation différentielle vérifiée par Θ puis calculer la période propre T_0 de ce pendule.

2-3) Déterminer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre.

2-4) Déterminer la valeur maximale Tm de la tension du fil au cours de ses oscillations.

<u>***Exercice 13***</u>**: PENDULE PESANT**

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène AB de section constante de longueur $2\boldsymbol{l}$, de centre I et de masse **M=2m** . A ses extrémités A et B sont fixées respectivement deux masses ponctuelles 3m et m .Le pendule peut osciller autour d'un axe (Δ) horizontal, perpendiculaire en O tel que **OA=** $\frac{\boldsymbol{l}}{2}$**,** au plan du disque. On néglige les frottements. A est au dessus de B dans la position d'équilibre stable.

1) Montrer que le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est :$\boldsymbol{J_\Delta}$**.=**$\frac{49}{6}$ **m** $\boldsymbol{l^2}$

2) Montrer Le centre d'inertie G du système formé par la tige munie des deux masses ponctuelles est tel que **OG=** $\frac{5}{6}\boldsymbol{l}$

3) Le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable d'un très petit angle θ_0 et lâché sans vitesse initiale. On rappelle que pour θ petit (en rad), $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$. On prend le plan horizontal passant par G lorsque le système est en équilibre stable comme référence des énergies potentielles de pesanteur.

3-1) Montrer par une étude dynamique que le mouvement de ce pendule est sinusoïdal et calculer sa période propre

3-2) Exprimer la longueur L du pendule synchrone de ce pendule pesant en fonction de l puis calculer sa valeur

3-3) Calculer la vitesse angulaire du pendule pesant au passage par la position d'équilibre.

3-4) Montrer que l'énergie mécanique du système pendule pesant – Terre reste constante puis calculer sa valeur . **Données :**

θ_0 = 10° ; m= 300g ;**l**= 62 cm ; g= 9,8N/kg .

<u>**Exercice 14**</u> **: Oscillations mécaniques**

Pour modéliser le ressort du système de suspension de voiture, un élève suggère d'utiliser un ressort de constante de raideur k (valeur indiquée par le fournisseur).

A - ÉTUDE STATIQUE

Dans un premier temps, cet élève se propose de vérifier la valeur de la constante de raideur du ressort. Pour cela il mesure la longueur du ressort seul et trouve une longueur l_0. Il suspend ensuite une masse m au ressort, celui-ci a alors une
longueur l.

A-1 À partir de la mesure observée, calculer la valeur k' de la raideur.

A-2 Quelle est l'erreur relative commise par rapport à la valeur de k indiquée
par le fournisseur.

B - ÉTUDE DES OSCILLATIONS FORCEES

L'élève relie maintenant l'extrémité du ressort à un excentrique mu par un moteur (figure ci-dessous) et réalise plusieurs enregistrements pour différentes vitesses de rotation du moteur mesurées par la fréquence de rotation N en Hertz.Il relève l'amplitude A de chaque courbe enregistrée.

N(Hz)	1,5	2	2,5	2,8	3,1	3,2	3,3	3,6	4	4,5
A(cm)	0,4	0,6	1	1,5	2,1	2,3	2	1,5	1	0,7

B-1 Quel nom donne-t-on au moteur muni de l'excentrique ?

B -2 Quel nom donne-t-on au système (ressort + masse) ?

B-3) tracer la courbe A=f(N)

B -3 Déterminer la fréquence de résonance, la largeur de la bande passante et le facteur de qualité. Quel phénomène obtient-on à f = 3,2 Hz ?

B -4 En déduire la période des oscillations à la résonance.

B -5 Comparer cette période à celle des oscillations libres.

B -6 Quel(s) changement(s) observerait-on si on utilisait une solution visqueuse S'.

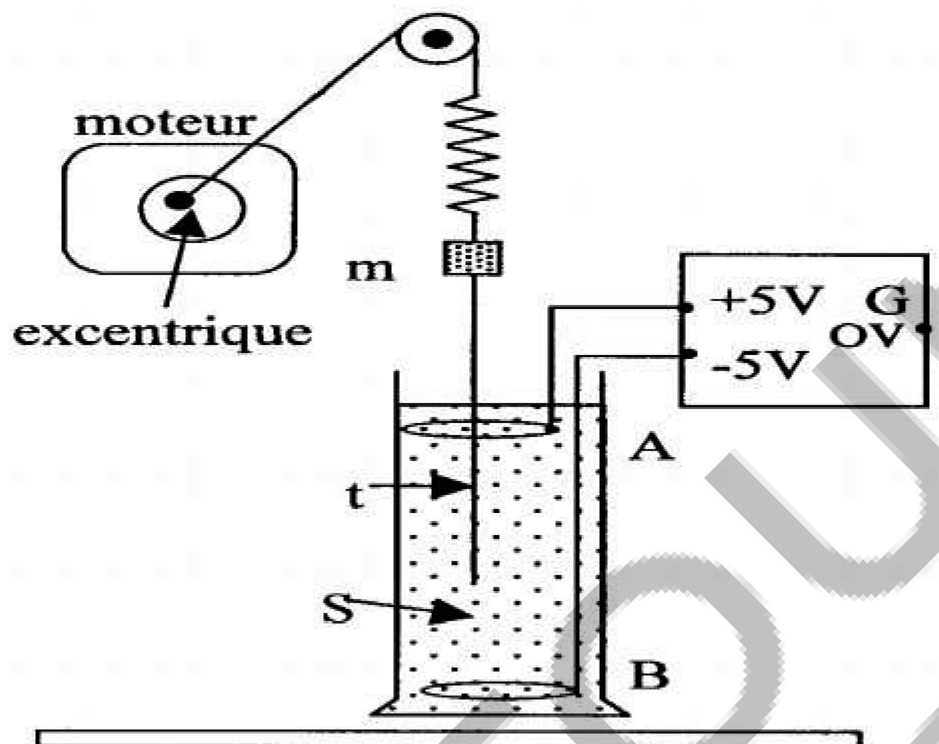
C - SUSPENSION D'UNE AUTOMOBILE

Le système de suspension d'une automobile comprend des ressorts et des amortisseurs. L'automobile est donc un système mécanique oscillant de fréquence propre N_0 .Certaines pistes du désert ont un aspect de « tôle ondulée » : elles comportent une succession régulière de bosses, distantes de L (quelques dizaines de centimètres).Pour une vitesse V_R, le véhicule subit des oscillations de forte amplitude qui diminuent dangereusement sa tenue de route.

C -1 Expliquer ce phénomène, en précisant le rôle joué par la piste déformée.

C -2 Exprimer la vitesse V_R en fonction de N_0 et L. Calculer cette vitesse en $km.h^{-1}$ avec N_0 = 5,0 Hz et L = 80 cm.

Données : $k = 40\ N.m^{-1}$; m = 100 g ; l_0 = 10,0 cm; l = 12,4 cm ; $g = 10\ N.kg^{-1}$; $\pi = 3,14$



Exercice 15 : Oscillateurs mécaniques en rotation

Un fil de torsion vertical de constante de torsion C est fixé par une de ses extrémités à un support fixe. A son autre extrémité on attache un cylindre homogène de masse M et de rayon R=3cm dont l'axe de symétrie de révolution est vertical. On néglige les forces de frottement.

1) On écarte le cylindre de sa position d'équilibre d'un angle $\Theta_m=30°$ et on l'abandonne sans vitesse initiale ; par une étude dynamique déterminé la nature du mouvement du cylindre puis donner l'expression littérale de sa périodeT_1en fonction de m et C.

2) La mesure de la durée 10 oscillations du cylindre donne t_1= 7s. Ecrire la horaire θ= f(t) des élongations de ce pendule en prenant comme origine des temps l'instant de son premier passage par sa position d'équilibre en allant dans le sens négatif des élongations.

3) On fixe sur ce cylindre deux surcharges identiques et ponctuelles S et S' de masse m =100g. Elles sont placées symétriquement par rapport à O. OS=OS'=R. La mesure de la durée 10 oscillations donne maintenant t_2= 14s.

3-1) Déterminer la masse M du cylindre et la constante de torsion C du fil.

3-2) L'amplitude des oscillations est θ_m=30°, calculer la vitesse linéaire de S quand le cylindre passe par sa position d'équilibre.

EXERCICE 16 : Pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige rectiligne homogène AB de masse M = 0,2 kg. Ce pendule peut osciller sans frottement dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par le point O de la tige. Ce point O est situé à la distance OG = d du centre d'inertie G de la tige.

On fixe en un point C situé à la distance OC = ℓ de O, l'une des extrémités d'un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K ; l'autre extrémité est fixée au point I (figure 3). Initialement, la tige est immobile et verticale, et le ressort détendu.

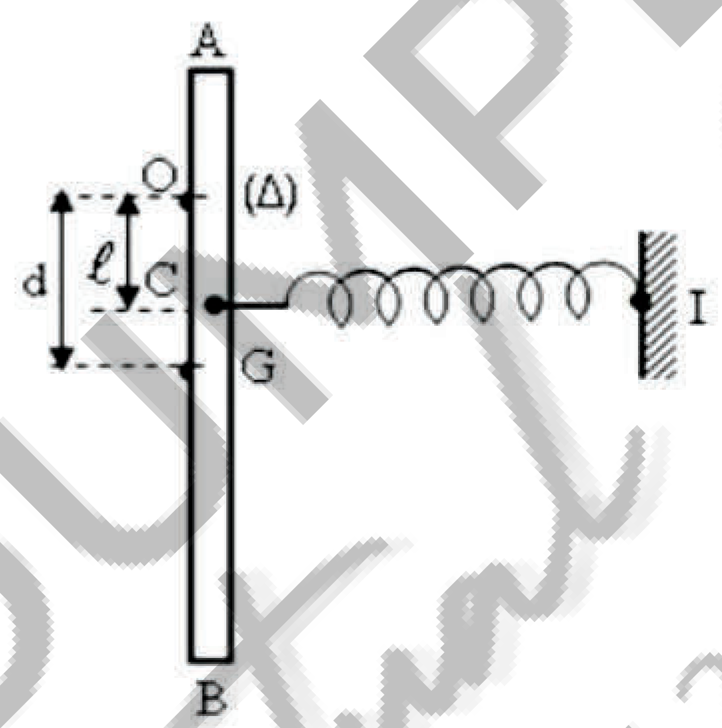
On écarte la tige AB de sa position d'équilibre d'un angle θ_m très petit et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant t = 0. Soient θ l'élongation angulaire du mouvement de la tige AB mesurée à partir de sa position d'équilibre, $\dot{\theta}$ sa vitesse angulaire, x le raccourcissement du ressort tel que $x = l \sin\theta$ et J_Δ le moment d'inertie de la tige AB par rapport à l'axe (Δ).

1 - En prenant comme référence de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur, la position d'équilibre, exprimer l'énergie mécanique du système {ressort + tige + Terre} en fonction de K, ℓ, M, d, g, J_Δ, θ et $\dot{\theta}$.

2 - Sachant que le système est conservatif, établir l'équation différentielle du mouvement de la tige AB autour de l'axe (Δ).

3 - Exprimer la période T en fonction de K, ℓ, M, g, d, et J_Δ.

4 - Si on supprime le ressort, la période de la tige AB devient $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J\Delta}{Mgd}}$ telle que $T' = 2\,T$. Calculer la distance d sachant que ℓ = 20 cm et K = 50 N.m^{-1}.

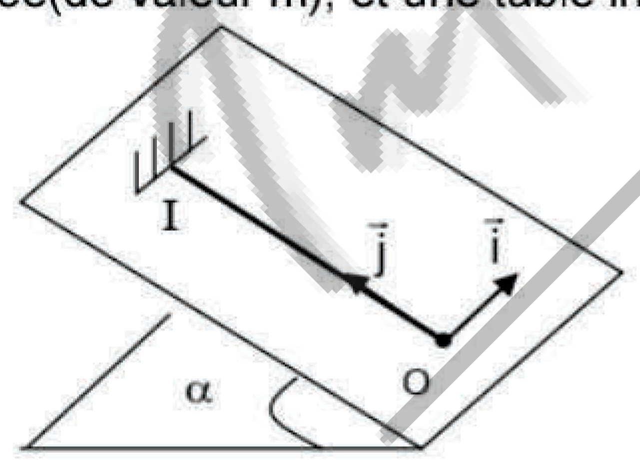


On donne :

$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta \approx \theta$ si l'angle θ est petit

<u>EXERCICE 17</u> : Détermination de la valeur du champ de pesanteur

Lors d'une séance de TP au laboratoire du Collège, le professeur a demandé à un groupe d'élèves de Terminale de déterminer la valeur du champ de pesanteur, à partir de pendules simples oscillants sur une table incliné . Il a mis à la disposition du groupe notamment des fils de nylon de longueur ajustable, des masses marquée(de valeur m), et une table inclinée d'un angle α=30° sur l'horizontale.



Pour différents pendules de longueur L= IO disposés sur la table inclinée, ces élèves ont mesuré à chaque fois la durée τ de 10 oscillations de faibles amplitudes. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous pour m=100g.

L(cm)	20	40	50	60	80	100
τ (s)	12,8	18,1	20,3	22,2	25,6	28,6

1) Après une étude théorique de la situation, Titi un des membres du groupe affirme que ce pendule est synchrone à un pendule simple de longueur « $L' = L \sin \alpha$ » oscillant dans le plan vertical. A l'aide d'un raisonnement argumenté prononce-toi sur cette affirmation.

2) En t'appuyant sur une courbe expérimentale et en lien avec tes connaissances, évalue la qualité du mesurage de ce groupe d'élèves.

Données :

- frottements négligés
- Valeur théorique du champ de pesanteur au lieu de l'expérience : $g_{théo}$= 9,80m/s^2
- prendre π= 3,14

<u>Exercice 18</u> : oscillateur élastique

On considère le dispositif mécanique ci-dessous :

- Le ressort à spires non jointives a une masse négligeable et une constante de raideur k ; son axe reste horizontal au cours de l'expérience.
- Les fils sont inextensibles et de masse négligeable ;
- La poulie à double tambour possède un moment d'inertie J par rapport à son axe et, les deux tambours ont des rayons R et r tels que R=2r.
- Le solide (S) de masse m est posé sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. On associe au centre d'inertie G du solide un axe x'x parallèle au plan de la table, et orienté vers le bas.

Le solide est écarté de sa position d'équilibre vers le bas sur une distance de X_m puis lâché sans vitesse initiale. Le solide S effectue alors des oscillations autour de sa position d'équilibre, suivant l'axe x'x. On néglige les frottements sur l'axe de la poulie.

1) Etablir l'expression de l'allongement a_0 du ressort à l'équilibre en fonction de m , k , g et α.

2) Montrer que l'abscisse x du centre d'inertie G du solide vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{4k}{m+\frac{J}{r^2}} x = 0$$

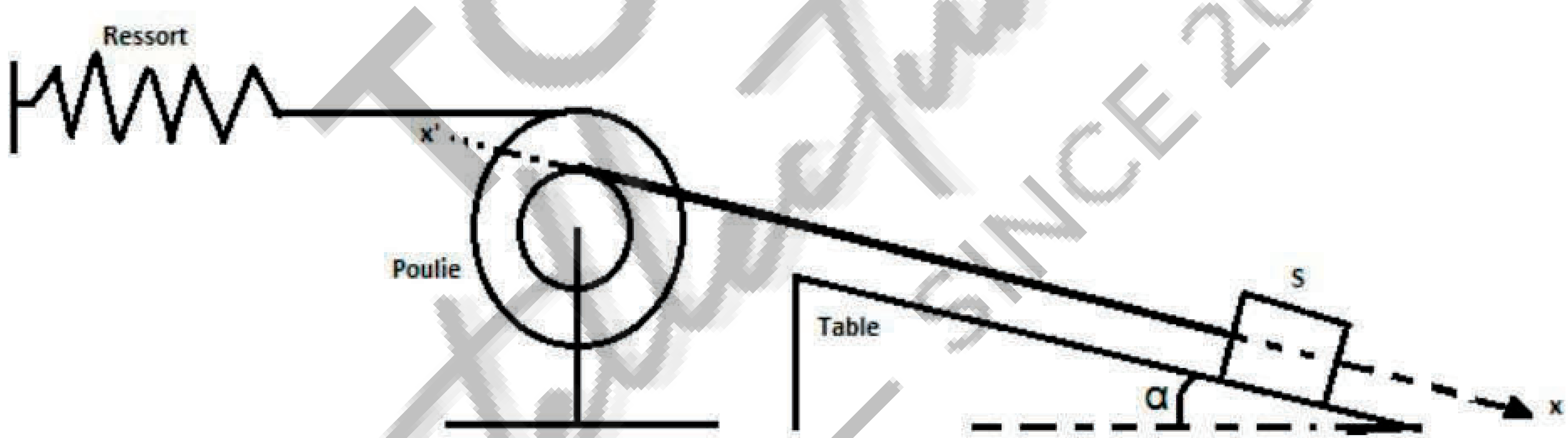
3) le système en oscillations bat la seconde.

3-1) Déterminer le moment d'inertie J de La poulie à double tambour.

3-2) Etablir la loi horaire x= f(t) du mouvement du centre d'inertie de S si on considère qu'à la date t=0, S passe par sa position d'équilibre dans le sens des élongations décroissantes.

3-3) Déterminer la vitesse du solide S au passage par sa position d'équilibre.

Données : m= 800 g ; r= 5cm ; k= 0,2 N.cm^{-1} ; α=20° ; X_m= 20cm.



<u>Exercice 19 : Oscillateur élastique</u>

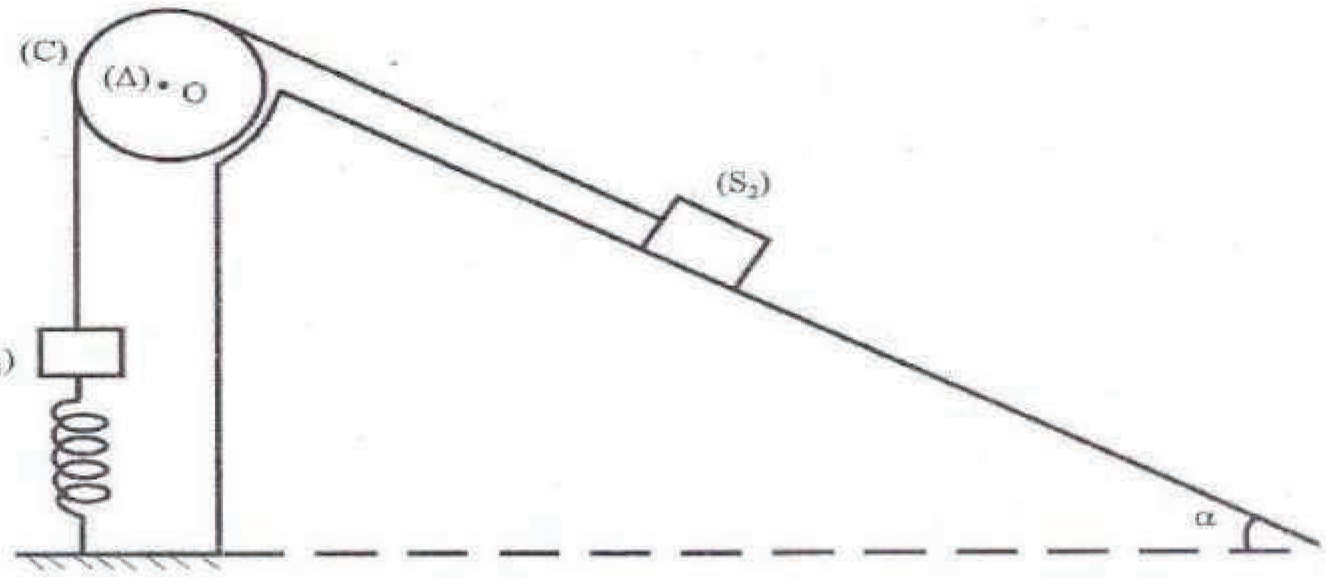
Un cylindre homogène (C)de masse M= 300g et de rayon R=20cm est mobile autour d'un axe horizontal (Δ)passant par son centre d'inertie O et supporte deux solides (S_1) et (S_2) de masses respectives m_1= 50g et m_2= 200g par l'intermédiaire d'un fil inextensible .Le solide (S_1) est relie a l'extrémité d'un ressort à spires jointives de raideur k= 10N/m. L'autre extrémité du ressort étant fixe .(voir figure).On négligera tous les frottements et on prendra g= 10m.s^{-2} pour valeur de l'accélération de la pesanteur.

1) Etablir en fonction de m_1, m_2 , α et g l'allongement Δl_o du ressort à l'équilibre puis calculer sa valeur.

2) On écarte le solide (S_2) de sa position d'équilibre vers le bas (sens positif choisi) d'une distance a= 2cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.

2-1) Etablir par une méthode dynamique l'équation différentielle du mouvement de (S_2) puis calculer sa période propre.

2-2) Déterminer l'équation horaire x=f(t) du mouvement de (S_2) en supposant qu'à la date t=0 son centre d'inertie se trouve à 1cm de sa position d'équilibre, le solide se déplaçant vers le haut.



Exercice 20 : pendule simple

On constitue un pendule simple en accrochant une sphère métallique ponctuelle (S) de masse m = 2.5 g à l'extrémité libre d'un fil vertical, inextensible, de masse négligeable et de longueur ℓ = 25 cm. Ce pendule peut osciller sans frottement autour d'un axe horizontal passant par le point de suspension O du fil. On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable, fil tendu, d'un angle θ_0, à la date t = 0, et le solide est lancé avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire au fil.

On repère la position du pendule à la date t par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

2. On prend pour niveau de référence de l'énergie potentielle le plan horizontal passant par la position d'équilibre stable G_0 de (S).

1.1. Exprimer l'énergie mécanique du système (pendule simple – Terre) à la date t, en fonction de m, g, θ, v et ℓ, à la date t.

4.2. En remarquant que le système est conservatif, exprimer la valeur v de la vitesse du solide à la date t, en fonction de θ, θ, g, ℓ et v_0.

4.3. Exprimer la valeur de la tenson du fil à la date t, en fonction de m, g, θ, θ_0, v_0 et ℓ.

4.4. Quelle doit être la valeur minimale de v_0 pour que le solide fasse un tour complet ?

5. Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule dans le cas d'oscillations quelconques.

6. Montrer que dans le cas d'oscillations de faible amplitude, le pendule simple est un oscillateur harmonique. Donner alors la valeur de sa période propre T_0.

7. La sphère S est électrisée et porte une charge électrique q. Le pendule est placé entre deux armatures métalliques planes et horizontales, entre lesquelles règne un champ électrique uniforme vertical $\vec{E}$ dirigé de haut en bas et de valeur E = 2,45 . 10^4 V.m^{-1}.

4.3. La nouvelle période des oscillations de faible amplitude est légèrement supérieure à T_0. En déduire le signe de la charge q.

4.4. On donne : T = 1,02 T_0 ; que vaut la charge q ?

Exercice 21 **: Oscillateur élastique**

On considère le dispositif mécanique de la figure 1 où R est un ressort horizontal, de masse négligeable, de constante de raideur k = 10 N.m^{-1}, dont l'extrémité A est fixe et dont l'extrémité B est fixée sur une masse M_1 glissant frottement sur un plan horizontal. Un fil CDEF, inextensible et sans raideur, de masse négligeable, est fixé en C sur M_1, passe sur une poulie de masse m, de rayon r, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe, puis est fixé en F sur une masse M_2. On admet que le fil ne glisse pas sur la poulie et que la poulie tourne sans frottement autour de son axe horizontal. Données : M_1= $2M_2$= 400g . ,m= 100g ; r= 20cm ; g= 10N/Kg

1) Calculer l'allongement Δl du ressort quand le système est en équilibre.

2)On repère la position de M_2 par son abscisse sur une axe x'Ox orienté suivant la verticale descendante. L'origine O étant la position d'équilibre précédente. L'opérateur impose à M_2 un déplacement x. L'opérateur libère M_2, sans vitesse initiale, à un instant pris pour origine de la position d'abscisse x_M. le système se met en mouvement de part et d'autre la position d'équilibre. On prend pour sens positif de rotation de la poulie, le sens de Ox vers Oy.

2-1) Calculer en fonction de x, la force que doit exercer l'opérateur sur M_2 pour la maintenir en équilibre dans cette position.

2-3) Calculer le travail que doit fournir l'opérateur pour amener M_2 de la position x = 0 à la position $x = x_M = 15$ cm, sans lui communiquer d'énergie cinétique (vitesse nulle).

2-3)Appliquer la deuxième loi de Newton à M_1 et M_2 ainsi qu'à la poulie pour établir l'équation différentielle vérifiée par x puis calculer la fréquence des oscillations.

2-4) L'équation horaire du mouvement de M_2 est de la forme : $x(t) = X_M \cos(\omega t + \rho)$.
Déterminer la phase initiale de cet oscillateur .

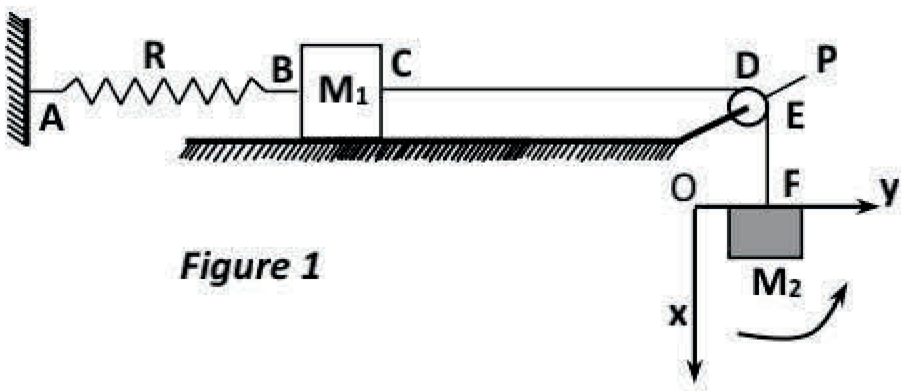


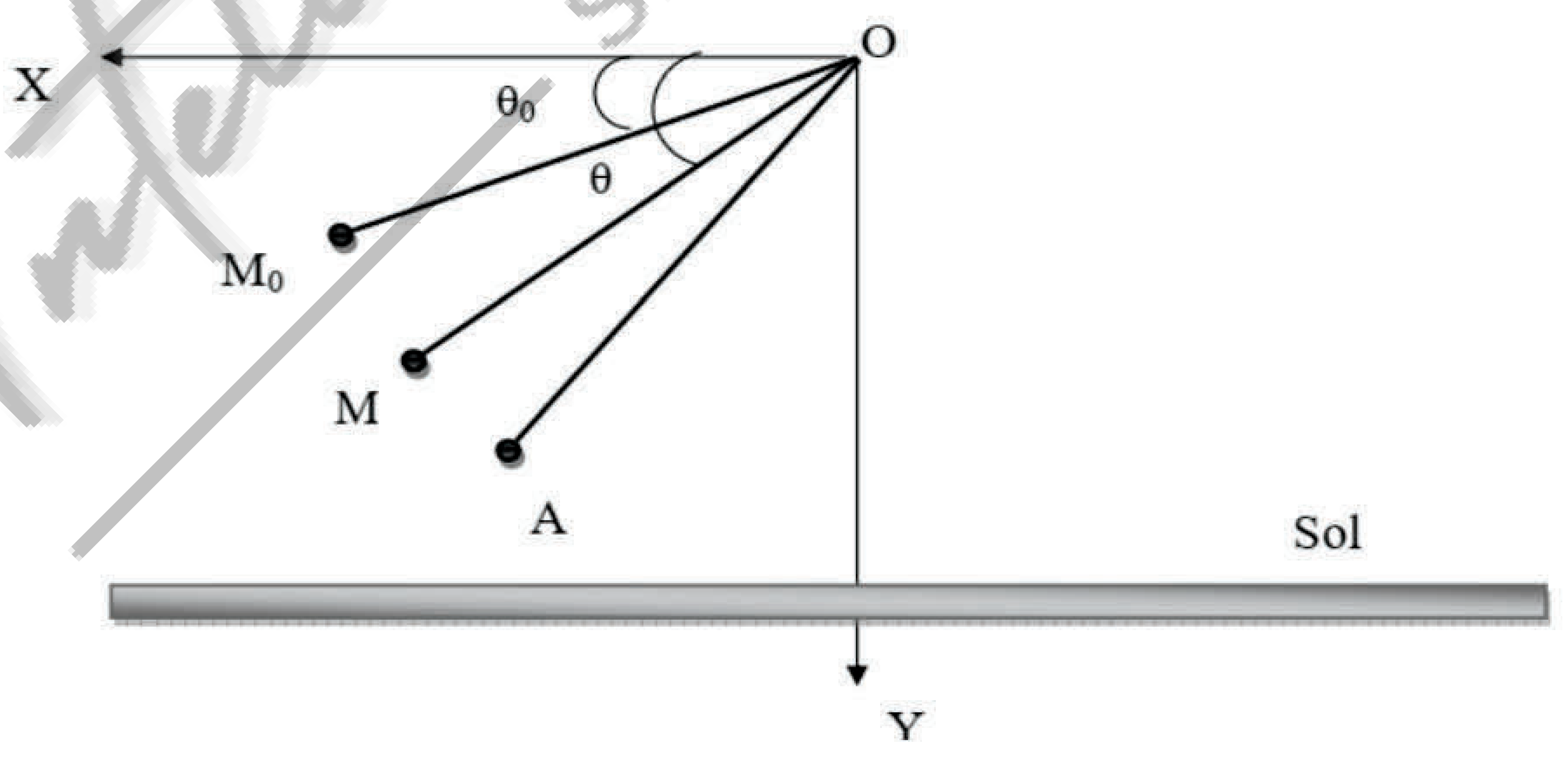
Figure 1

Exercice 22 : pendule simple

On étudie le mouvement d'un pendule simple constitué d'une bille ponctuelle de masse m = 50 g suspendue en un point fixe O par un fil inextensible de longueur ℓ = 50 cm.
Initialement le pendule est en équilibre stable, le fil est alors vertical et le solide est en dessous de O.
Dans toute la suite les frottements seront négligés.

3.1 Dans un premier temps, le solide est écarté légèrement de sa position d'équilibre stable puis abandonné sans vitesse initiale. Le système effectue alors de part et d'autre de cette position d'équilibre, des oscillations périodiques, de faibles amplitudes, de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Evaluer la période de ces oscillations. Quelle devrait être la valeur de la longueur du fil pour que le pendule « batte la seconde » (une demi-oscillation dure 1 seconde)? On prendra g = 9,8 m.s^{-2}. **(0,5 pt)**

3.2 On écarte maintenant le fil du pendule de sa position d'équilibre jusqu'à la position définie par l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_0}) = 15°$.(voir fig ci-dessous) et on lance la bille dans le plan XOY avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$ dirigé vers le bas et tangent au cercle de rayon ℓ et de centre O. On repère la position de la bille à un instant t par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.



3.2.1 Par application du théorème de l'énergie cinétique établir l'expression de la vitesse de la bille en M en fonction de v_0, g, ℓ, θ et θ_0. **(0,5 pt)**

3.2.2 En utilisant le théorème du centre d'inertie au point M ; établir l'expression de la tension T du fil en M en fonction de v_0, ℓ, θ_0, θ, g et m. **(0,75 pt)**

3.2.3 Exprimer la valeur minimale V_{0m} de la vitesse V_0 pour que la bille effectue un tour complet le fil restant tendu et la calculer. **(0,5 pt)**

3-2.4 Le pendule est à nouveau lancé à partir de M_0 avec un vecteur vitesse $\vec{v_0}''$ dirigé vers le bas, tangent au cercle de rayon ℓ et de centre O, de valeur V'_0 = 4,15 m.s^{-1}. Mais le fil se casse quand la bille passe pour la première fois au point A repéré par l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA}\right) = 45°$.

3-2.4-1 Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}_A$ de la bille au point A. **(0,5 pt)**

3-2.4-2 Déterminer, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$ donné dans le schéma précédent, les équations horaires du mouvement de la bille après sa libération. **(0,75 pt)**

3-2.4-3 En posant $u = \ell\cos\alpha - x$, montrer que, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$, l'équation de la trajectoire de la bille après sa libération s'écrit : $y = \dfrac{g}{2v_A^2\sin^2\alpha}u^2 + \dfrac{u}{\tan\alpha} + \ell\sin\alpha$. **(0,5 pt)**

3-2.4-2 Déterminer, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$ donné dans le schéma précédent, les équations horaires du mouvement de la bille après sa libération. **(0,75 pt)**

3-2.4-3 En posant $u = \ell\cos\alpha - x$, montrer que, dans le repère orthonormé $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$, l'équation de la trajectoire de la bille après sa libération s'écrit : $y = \dfrac{g}{2v_A^2\sin^2\alpha}u^2 + \dfrac{u}{\tan\alpha} + \ell\sin\alpha$. **(0,5 pt)**

3-2.4-4 Déterminer l'abscisse du point d'impact I de la bille sur le sol horizontal qui se trouve à une distance h = 1,5 m au dessous du point O. **(0,5 pt)**

EXERCICE 23 : Pendule simple

On constitue un pendule simple en accrochant une sphère métallique ponctuelle (S) de masse m = 500 g à l'extrémité libre d'un fil vertical, inextensible, de masse négligeable et de longueur ℓ = 2m. Ce pendule peut osciller sans frottement autour d'un axe horizontal passant par le point de suspension O du fil. On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable, fil tendu, d'un angle θ_0=5 degré, à la date t = 0, et le solide est lancé dans le sens positif des élongation avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire au fil de valeur $5\pi\sqrt{6}$ m/s. Accélération de pesanteur $g = \pi^2$ m/s^2 .On repère la position du pendule à la date t par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

On prend pour niveau de référence de l'énergie potentielle le plan horizontal passant par la position d'équilibre stable G_0 de (S).

1) Etablir en utilisant la relation dynamique pour un solide en rotation l'équation différentielle des oscillation de ce pendule pour des oscillations de faibles amplitudes.

2) L'équation horaire des élongations de ce pendule peut se mettre sous la forme $\Theta = a\,\mathrm{Cos}(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$ en degré ,t en (s) . Déterminer les valeurs de T , a et φ .

3) Exprimer en fonction du temps t à une date quelconque :
   a) L'énergie cinétique Ec de la sphère S
   b) L'énergie potentielle Ep du système sphère S -terre. On prendra $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$
   c) En déduire que l'énergie mécanique du système (terre – sphère S) se conserve puis calculer sa valeur
   d) Montrer que la fonction Ec =f(t) et périodique et déterminer sa période T'.

e)Tracer sur un même graphique les courbes de variation Ec ; Ep et E en fonction du temps pour t ϵ $[0; \quad T']$.Préciser vos échelles.

3) On suppose à présent que la sphère S est lancée sans vitesse initiale lorsque le fil fait un angle de θ_1 =10 degré avec la verticale. Au passage par sa position d'équilibre le fil rencontre un clou O' situé à 1m au dessous du point de suspension O du fil et perpendiculaire au plan des oscillations.

3-1)Décrire le mouvement ultérieur de la sphère , montrer qu'il est périodique puis calculer sa période T''.

3-2) On désigne par F_1 et F_2 les valeurs respectives de la tension du fil lorsque le pendule atteint sa limite d'élongation de part et d'autre de la verticale de O ;

$F_1 > F2$. Calculer le rapport $\frac{F_1}{F_2}$.