Collège Jean TABI d'Etoudi
Département de maths
BP 4174-Yaoundé
Tél/Fax : 222.21.60.53
N/Réf : CJT/22-23/DH/HVN/CSM

Année scolaire 2022-2023
Période n°5
Classe : T^{le} C
Durée : 4H
Coef. : 7

DEVOIR HARMONISE DE MATHEMATIQUES DU 06/03/2023

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES (15points)

Exercice 1 : (5 points)

A- On pose $u_n = \int_0^{\pi} \frac{cos(nx)}{\frac{5}{4}-cos(x)}dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. On admet que $u_0 = \frac{4\pi}{3}$.

1. Démontrer que $u_1 = \frac{2\pi}{3}$. (0,5 pt)
2. On rappelle que pour tous réels a et b, on a : $\boldsymbol{cos(a) + cos(b) = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$.
   a) Démontrer que $u_n + u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1}$. (0,75 pt)
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. (0,75 pt)

B- Dix urnes contiennent chacune cinq boules indiscernables au toucher portant les numéros -2 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.
On tire de la première urne une boule qu'on ne remet pas dans l'urne ; Ensuite on tire une deuxième boule de la même urne. Soient a et b les numéros portés par la première et la deuxième boule respectivement.
On considère l'ensemble (Γ) des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation : $\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{b^2} = -2$.

1. Montrer que la probabilité p_1 que (Γ) soit une ellipse est inférieure à 0,2 (0,5 pt)
2. Calculer la probabilité p_2 pour que (Γ) soit une hyperbole équilatère. (0,5 pt)
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) pour $a = 4$ et $b = 1$. (1 pt)
4. On répète l'expérience aléatoire précédente (tirages successifs sans remise de deux boules) dans chacune des 10 urne. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'ellipse obtenues
   a) Calculer la probabilité p_3 d'obtenir une ellipse au moins deux fois. (0,5 pt)
   b) Calculer la variance de X. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 points)

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les vecteurs : $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e_1} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3} = -\vec{i} + \vec{k}$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E. (0,5 pt)
2. Déterminer la matrice M_1 de f dans la base B. (1 pt)
3. Montrer que *ker f* est une droite vectorielle engendrée par $\vec{e_1}$. (0,5 pt)
4. Montrer que $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de *Im f* et justifiez que $\vec{n}$ en est un vecteur normal. (1 pt)
5. a) Démontrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de E. (0,5 pt)
   b) Ecrire la matrice M_2 de f dans la base B'. (1,5 pt)

Exercice 3 : (5 points)

Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(\mathbf{E_a})$: $\mathbf{a^x = x^a}$.
Pour cela, on considère la fonction f_a telle que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f_a(x) = a^x x^{-a}$.

1. On suppose que : $a = e$.
   a) Etudier les variations de la fonction f_e. (0,75 pt)
   b) Résoudre alors l'équation (E_e). (0,5 pt)

c) Démontrer que : $\forall x \in]1;+\infty[, \frac{x}{\ln x} \geq e$. (0,5 pt)

2. On suppose que : $0 < a \leq 1$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_a. (1 pt)

b) Résoudre alors l'équation (E_a). (0,5 pt)

3. On suppose que : $a > 1$ et $a \neq e$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_a. (0,75 pt)

b) Déduire des questions 1.c et 3.a que la fonction f_a admet un minimum absolu strictement inférieur à 1. (0,5 pt)

c) En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions situées de part et d'autre du nombre $\frac{a}{\ln a}$. (0,5 pt)

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES (5points)

Situation :

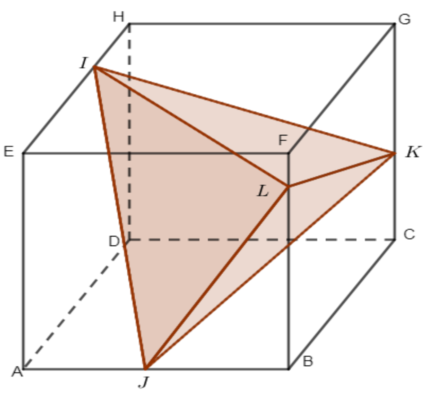
ABDOURAMAN est un artisan résidant au quartier Tsinga-village de Yaoundé. Il a reçu une commande d'un objet de décoration dont la masse doit être inférieure à 15 kg. Cet objet est une boite en verre de forme cubique(tel que présenté sur la figure ci-dessous), d'arête mesurant 30cm, dans laquelle il doit introduire un tétraèdre plein IJKL fait en acier et recouvert d'or fin d'épaisseur et de masse négligeables et dont la quantité nécessaire pour recouvrir un centimètre carré de surface est estimée à 5.000 FCFA . Sur cette figure, EI = 2 IH, BL = 2 LF, J est le milieu de [AB] et K celui de [CG]. La masse volumique de l'acier utilisé est 8,9 g/cm^3 ; Le verre utilisé pèse 2,5 Kg le mètre carré.

ABDOURAMAN possède un véhicule tout neuf qui consomme 10 litres d'essence aux 100 km. Il se rend à son atelier se situant à Nlonkak tous les jours ouvrables (de Lundi à Samedi). Le Prix du super étant passé de 630 FCFA à 730 FCFA le litre, il souhaite minimiser ses dépenses en carburant. Les distances(en kilomètres) d'un lieu à un autre du réseau routier parcouru par ABDOURAMAN sont données dans le tableau ci-dessous.

Tâches :

1. Déterminer le coût estimatif de l'or devant servir à recouvrir la surface extérieur du tétraèdre.
2. La contrainte relative à la masse maximale de cet objet sera-t-elle respectée ?
3. Quel est le budget hebdomadaire minimum qu'ABDOURAMAN doit allouer à son déplacement pour son lieu de service ?

	Sancta barbara (S)	Tsinga village (TV)	Man guier (MG)	Nlonka k (NL)	Ngousso (NG)	Olembe (O)	Messassi (MS)	Tongolo (TG)	Emana (EM)	Etoudi (ET)
S		3			2					1
TV						3				
MG					2			1		3
NL								3		
MS						2			3	
NG										
O										
TG										1
EM				4						2
ET										



Présentation : 0,5point