Travaux dirigés $N^0 1$
Niveau : Terminale ; série C
Durée :x heures Coef :y
Date : Septembre 2024

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P : "$\forall x \in \mathbb{R}/x^2 > 0$"

2) P : "$\exists x \in \mathbb{R}/x^2 - 2 = 0$"

3) $P : x \in [1; 2[$

4) P : "$\forall n \in \mathbb{N}/\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$"

5) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq cosx \leq 1$

6) $P : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n < m$

7) $P : (\exists n \in \mathbb{N}); 2n + 1$ est pair

8) $P : (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

9) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$

10) $P : (\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$

11) $P : (\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$

12) $P : (\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

13) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

Exercice 2 :

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) Le carré de tout réel est positif.

2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

5) Il existe un entier multiple de tous les autres.

6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 :

1) Montrer que : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

3) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

Exercice 4 :

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(E) : 1 - \dfrac{x}{4} > \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

3) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 6 :

1) Soient $a > 0$ et $b > 0$ Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a = b$

2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3) On considère l'ensemble : $A = \{1; 2; 3; 4; ...; n\}$ avec n un nombre entier impair. Et soient $x_1; x_2; x_3; x_4; ...; x_n$ des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux. Montrer que : $\exists i \in A / x_i - i$ est pair

Exercice 7 :

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1 + 2n$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$.

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 5 : 2^n \geq 6n$

4) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3

5) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$.

6) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

7) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3}{4}$

8) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$

9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 8 :

Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$

2) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$

3) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

4) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$

5) $P : (\forall \alpha > 0); (\exists x \in \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\})/x < \alpha + 10$

Exercice 9 :

A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formule $Pou\overline{P}$ est une tautologies.

MINESEC
INSTITUT BILINGUE TSIMI EVOUNA
ANNÉE SCOLAIRE 2024/2025
Département de mathématiques

Travaux dirigés $N^0 2$
Niveau : Terminale ; série C
Durée :x heures Coef :y
Date : Septembre 2024

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1 :

1) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

2) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.

3) Un nombre s'écrit $\overline{1x1yxy}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63.

Exercice 2 :

1) Démontrer que la somme des cubes de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 9.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que la fraction $\dfrac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11.

4.a) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13.

b) Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne par 3 de $A = 2n^3 - n^2 + 2$.

5.a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[7]$

b) Déterminer l'entier naturel n tel que $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[3]$.

Exercice 3 :

I) Pour tout entier naturel n on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n $A_{n+3} \equiv A_n[7]$.

2) Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0[7]$

3) Les nombres $\alpha = \overline{1110}^2$, $\beta = \overline{1010100}^2$, $\gamma = \overline{1001001000}^2$ sont-ils divisibles par 7 ?

II) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n + 2^{2n} + 2^{3n} + 2^{4n} \equiv 0[5]$?

Exercice 4 :

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\begin{cases} a \times b = 12950 \\ PPCM(a,b) = 2590 \end{cases}$

2. a) Montrer que l'entier 491 est premier.

b) Montrer que les entiers 491 et 624 sont premiers entre eux.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $491x - 624y = 1$

3) On considère le nombre $E(n) = n^4 + n^2 + 1$, n étant un entier positif non nul.

a) Décomposer $E(n)$ en produit de facteurs du second degré, puis démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.

b) Le nombre $E(n)$ peut-il être premier ?

4) Quel est le nombre de diviseurs positifs du nombre 1638 ?

Exercice 5 : 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ chacun des systèmes.

$\begin{cases} PGCD(x,y) = 18 \\ x + y = 360 \end{cases}$ et $\begin{cases} PGCD(x,y) = 18 \\ x \times y = 6480 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ chacun des systèmes. $\begin{cases} PGCD(x,y) = 35 \\ x + y = 420 \end{cases}$, $\begin{cases} PPCM(x,y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$

$\begin{cases} PGCD(a,b) = 7 \\ a^2 - b^2 = 343 \end{cases}$

Exercice 6 :

I-1) Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que si 3 divise $a^3 + b^3$, alors 3 divise $(a+b)^3$.

2) Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $c^{19} \equiv 1[139]$.

Montrer que c et 139 sont premiers entre eux.

3) Soit A et B deux nombres entiers tels que $A = \overline{1a3a}^4$ et $B = \overline{bca3}^7$

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 7x + 2y = 50$

b) Sachant que A est divisible par 11 et que le couple $(b;c)$ est solution de l'équation (E), donner les écritures de A et B en base 10.

4.a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 7^n par 10.

b) Déterminer le chiffre des unités de $M = 3017^{2019^{2020}}$.

II On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$ .où m=PPCM(a ; b)

1) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.

2) Démontrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$

3) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système (S).

Exercice 7 :

1) x et y sont deux entiers naturels non nuls $(x < y)$. Trouver x et y sachant que $xy = 1734$ et $PGCD(x;y) = 17$.

2) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-3;28)$ et $B(24;10)$.

(a) Démontrer que l'équation de la droite (AB) s'écrit $2x = 3(26-y)$.

(b) Déduis-en les points du segment $[AB]$ dont les coordonnées sont entières.

3) Justifie que le 503 est premier.

Exercice 8 :

1. (a) Vérifie que le couple $(5;-7)$ est une solution de l'équation
$(E) : 13x + 7y = 16$.

b)Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ vérifiant l'équation (E).

2) n désigne un entier naturel. On pose $A = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

(a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.

(b) Déduis-en le reste de la division euclidienne de 8^{2023} par 5.

(c)Montrer que A est divisible par 7.

3) Effectuer la division euclidienne de -1600 par 93.

Exercice 9 :

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$

1) Énonce le théorème de BEZOUT.

2.a) Montre en utilisant le théorème de BEZOUT que (E) admet au moins une solution.

b) Montre que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E_0) : 21x \equiv 4[17]$.

3.a) Détermine l'inverse modulo 17 de 21.

b) Montre que les solutions de (E_0) sont des entiers relatifs $x = 1 + 17k$.

4) Déduis l'ensemble solutions de (E).

Exercice 10 :

Les trois question de cet exercice sont indépendantes. 1-a) Déterminer l'ensemble des couples $(x;y)$ de nombres entiers relatifs; solution de l'équation :$(E) : 8x - 5y = 3$

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p;q)$ de nombres entiers vérifiant : $m = 8p + 1$ et $n = 5p + 4$ Montrer que le couple $(p;q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9[40]$

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2-a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$

b) Quel es le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7?

3-) Soit a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$ .On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 11 :

On rappelle qu'une année ordinaire a 365 jours et une année bissextile 366jours . Une année A est bissextile lorsque A est divisible par 4 mais pas par 100 ou si A est divisible par 400. Le 1er Janvier 2008 était un mardi.

a. Quel jour de la semaine sera-t-on le 1er Janvier 2036 ? En déduis que les calendriers des années 2008 et 2036 sont identiques.

b. Henry est né le 30 novembre 1982. Quel est le jour de la semaine est-il né ?

4. Soit n un entier naturel.On désigne par $a; b$ et c 3 entiers naturels impairs. On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ et que le produit de deux entiers consécutifs est pair.

a. Montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0 mod(8)$ ou $n^2 \equiv 4 mod(8)$.

b. Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$.

c. Montrer que $2(ab+ac+bc) \equiv 6[8]$

d. En déduis que $a^2 + b^2 + c^2$ et $2(ab+ac+bc)$ ne sont pas des carrés parfaits.

Situation:

Sur un site de vente de terrains titrés de forme rectangulaire, plusieurs lots sont disponibles et les dimensions de chaque lot vérifient le système $\begin{cases} ab - b^2 = 2028 \\ pgcd(a;b) = 13 \end{cases}$. Le mètre carré de ce terrain coûte $8000 fcfa$. M DJOUMESSI dispose d'un montant de $28393000 fcfa$ pour l'achat d'un bon lot, mais doute de pouvoir en trouver sur ce site.

Afin de pouvoir retrouver facilement le mot de passe de son coffre-fort lorsqu'il l'a été oublié, M DJOUMESSI a gravé sur son coffre-fort la phrase suivante "Le mot de passe du coffre-fort est l'écriture en base deux de la somme de deux nombres entiers naturels tels que, la différence de ces deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un part l'autre, le quotient est 13 et le reste 34." Ce matin M DJOUMESSI a envoyé son fils Junior déposer une importante somme d'argent dans ce coffre. Une fois devant le coffre-fort, Junior ne parvient plus à joindre son père.

Junior est né le 17/05/2003. il rend visite à son grand-père et trouve chez lui un calendrier de l'année 2013 qui indique que celle-là à commencé un mardi.

Tâches :

1) Aide Junior à ouvrir ce coffre-fort afin de pouvoir y déposer cet argent.

2) M DJOUMESSI pourra-t-il trouver un bon lot sur ce site avec cette somme d'argent ?

3) Quel jour de la semaine junior est-il né ?