MINESEC-DRESLT	Evaluation 2 TRIMESTRE I	Novembre 2024
L.B.Ferme Suisse	COEF 4	Durée : 04H00
Classe : TERMINALES D	Épreuve de MATHÉMATIQUES	Examinateur : M.TIA

L'épreuve comporte deux parties indépendantes et obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES **15 points**

EXERCICE 1 : 4pts

I/ $z = x + iy$ est un nombre complexe tel que $z \neq 4 + i$, $Z = \frac{z-3i}{z-4-i}$;

1. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite (D) dont on donnera une équation cartésienne. **1pt**
2. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur est un cercle dont-on donnera les coordonnées du centre et la valeur de son rayon. **1pt**

II/ a est un nombre réel ; on considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$.

1. Montrer que $(1+i)^2 = 2i$. **0,25pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) puis montrer que ses solutions ont le même module. **1,25pt**

III/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+4i)^n + (2-i)^{2n}$ est un nombre réel. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 4,25pts

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [\sqrt{3}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{3}{x} + x)$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I. **0,5pt**
2. En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq \sqrt{3}$. **0,25pt**
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. **0,5pt**
4. Montrer que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \sqrt{3}| < \frac{1}{2}|x - \sqrt{3}|$. **0,5pt**
5. On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_n$ est majorée par $\sqrt{3}$. **0,75pt**
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{3}| < \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{3}$. **0,5pt**
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \sqrt{3}|$. **0,75pt**
   (d) En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 4,5pts

On considère la fonction f définie explicitement par l'expression $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$.

1. (a) Déterminer D_f et calculer $\lim_{\to -\infty} f(x)$. **0,5pt**
   (b) Justifier soigneusement que f est continue sur $[-1; +\infty[$. **0,5pt**
2. (a) f est-elle dérivable à gauche de $x_0 = 1$? donner l'interprétation géométrique du résultat. **0,5pt**
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{-x}{1-x+\sqrt{1-x}}$. **0,5pt**
   (c) Dresser le tableau des variations de f. **1pt**
3. (a) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-5; -4[$. **0,75pt**
   (b) Vérifier que $\alpha^2 + 4\alpha - 4 = 0$ puis déduire la valeur exacte de α. **0,75pt**

EXERCICE 4 : 3,25pts

Soit la suite numérique $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_2 = \frac{1}{6} + \sqrt{2}$. **0,5pt**

2. Soit $(v_n)_n$ la suite numérique définie par $v_n = u_n\sqrt{2} - n$; démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. **0,75pt**
3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. **1,25pt**
4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$; montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}$ puis calculer la limite de S_n. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES 5 points

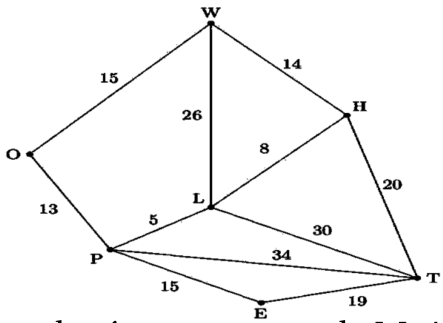
Situation :

M.Aimé possède une entreprise de production de farine de manioc qu'il vend par sac ; le coût de production journalier en milliers de francs de son entreprise est donné par :
$C(q) = 0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80$ avec $q \in [0;80]$. Le prix d'un sac de farine de manioc ainsi produit est vendu à 38 000frs il aimerait savoir quelle quantité produire exactement par jour afin de réaliser un bénéfice maximal si toute la production est vendue par jour.

Hamidou, l'un des cardres de M. Aimé veut démissionner car soupçonne son patron de favoritisme. En effet, il sait que la moyenne en anciénneté des cardres est de $\frac{596}{59}$ et celle des salaires de ces derniers est de $\frac{8450}{59}$; dans le tableau ci-contre donnant le nombre d'années d'exercice X des cardres en fonction de leur salaire mensuel Y en milliers de francs , M. Aimé a caché les données de deux de ses cardres les plus paresseux de l'entreprise. Hamidou a besoin de connaître les informations cachées sur ses collègues paresseux afin de confirmer ses soupçons.

y \ X	2	6	10	14	18	22
75	[illegible]	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	[illegible]	1

Pour se rendre à son entreprise représentée par le point T quittant de sa maison située au point O sur la carte ci-contre où les distances marquées sont en km, M.Aimé utilise un voiture qui consomme 4l pour 10km ; il a été contacté très tôt par l'entreprise , heure où tout est fermé et a constaté que son carburant restant dans le véhicule est de 15l. Il ne sait si ce carburant pourra suffir pour se rendre en entreprise.



Tâches :

1. Quelles sont les informations cachées des deux employées paresseux de M. Aimé ? **1,5pt**
2. Quel est le nombre de sacs de manioc à produire par l'entreprise de M.Aimé pour réaliser un maximum de bénéfice ? **1,5pt**
3. Le carburant restant dans la voiture de M. Aimé peut il suffir pour arriver en entreprise ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt