Collège LIBERMANN
B.P. : 5351 DOUALA – CAMEROUN
Tél. : 33 42.28.90
Email : collibermann@yahoo.fr
Web : www.collibermann.org

Département de mathématiques		
Devoir surveillé n°3 – MATHEMATIQUES		
Niveau : Terminale C		
Date : 17/12/2024	Durée : 4 heures	Cœff : 7

EVALUATION DES RESSOURCES 12,5 points

Exercice 1 4,25 points

Pendant les week-ends, Sonia vend des mangues, des bananes et des oranges. Un jour, elle a vendu un nombre a de mangues et un nombre b de bananes, tels que le plus petit commun multiple de a et b divisé par le deuxième entier naturel μ vérifiant $3\mu \equiv 2[7]$ a pour reste $r = 5$ et pour quotient $q = 10$. Par ailleurs, Sonia réalise que lorsqu'on diminue le carré de la somme de a et b du double du produit de a et b, on trouve $\mu^2 + 5ppcm(a, b) + 41$. Le bénéfice y en centaines de francs que réalise Sonia en fonction du nombre x de clients possibles est donné par l'égalité $ax - by = c$ où c est le nombre d'oranges vendues. Ce jour là, Sonia a reçu le plus petit nombre de clients possibles. Sonia a vendu ce jour moins de mangues que bananes.

1. Justifier que $\begin{cases} ppcm(a, b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$. **1 pt**

2. Déterminer les entiers naturels dont le carré divise 666. **0,25 pt**
   En déduire les valeurs possibles du $pgcd(a, b)$. **0,5 pt**

3. Retrouver le nombre de mangues et de bananes vendus ce jour-là. **1 pt**

4. En fait, x et y sont tels que, le point $M(x, y, z)$ appartient à l'intersection du plan (P) d'équation $2x + 9y - 2z - 6 = 0$ et du plan (Q) passant par $O(0, 0, 0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(\frac{13}{2}, -15, 1)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   a) Justifier que le nombre d'oranges vendu est égal à 6. **0,5 pt**
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $15x - 21y = 6$. **0,5 pt**
   c) Déterminer le bénéfice réalisé par Sonia. **0,5 pt**

Exercice 2 4,5 points

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm).
On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

1. Démontrer que (C_0) est un demi-cercle de rayon $\frac{1}{2}$ dont on précisera le centre. **0,5 pt**

2. Soit $n \geq 1$.
   a) Déterminer $f_n'(x)$ lorsque $0 < x < 1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $n + \frac{1}{2} - (n + 1)x$ ont le même signe. **0,75 pt**
   b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0 et en 1. **0,5 pt**
   c) Donner le tableau de variation de f_n. (L'extremum de f_n n'est pas exigé). **0,75 pt**

3. a) Soit $x \in [0, 1]$ et $n \geq 0$, étudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}). **0,5 pt**
   b) Tracer les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) dans le même repère. **1,5 pt**

Exercice 3 4 points

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1, où a est un nombre complexe donné autre que 1.

Soit f l'application de $P - \{B\}$ dans $P - \{B\}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-a}{z-1}$.

1. Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E):
$$z^2 - 2z + a = 0.$$ **0,5 pt**

2.a) On suppose que $a = 1 + e^{i2\theta}$, où θ appartient à $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation (E). **0,5 pt**

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de (E). **0,5 pt**

3. Dans cette question, on suppose $a = -1$. Soit M un point de $P - \{B\}$ d'affixe z et M' d'affixe z', image de M par f.

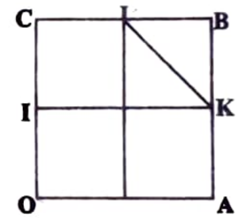
a) Montrer que $mes(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{BM}}) + mes(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}}) \equiv 0[2\pi]$. **0,75 pt**

En déduire que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{MBM'}$. **0,5 pt**

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si, $|z| = 1$. **0,75 pt**

c) En déduire la construction du point M' image du point M du cercle trigonométrique privé de du point B. **0,5 pt**

<u>EVALUATION DES COMPETENCES</u> 7,25 points



<u>Situation :</u>

La mairie de l'arrondissement de NDOM a obtenu en janvier 2023 un prêt de 10 millions pour la construction d'une bibliothèque.
La figure ci-contre schématise les différentes séparations qui seront réalisées à l'intérieur de cette bibliothèque.

$OABC$ est un carré de côté $c > 0$; I, J et K sont les milieux respectifs de $[OC]$, $[BC]$ et $[AB]$.
Pour rembourser le prêt et assurer le bon fonctionnement de de la bibliothèque, un droit d'adhésion et des frais d'abonnement seront institués pour les usagers.
A la cérémonie de lancement du projet, les différents collèges de la communauté ont été massivement représentés par les élèves. Une ONG a décidé de mettre des manuels scolaires et des livres de culture générale à la disposition de la bibliothèque. Des rayons de manuels scolaires seront disposés le long des segments $[OI]$ et $[JK]$.
AWA, première responsable de son collège et élève en classe de terminale scientifique est impressionnée par la présentation du projet. C'est ainsi qu'elle a retenu que le comptoir du bibliothécaire peut être modélisé par un arc de cercle et son bureau, placé en un point M tel que $\frac{\Omega J}{\Omega O} = \frac{JK}{OI}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega J}}\right) = Mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{JK}})$. AWA est intéressée par la position du point Ω.
La fonction f définie par $f(t) = 4t^3 + 64t + 128$ exprime en centaines de mille de francs, l'évolution des réserves sur les recettes générales dégagées après un temps t (en années). AWA voudrait savoir en quelle année la dette pourra être payée. Le quart des réserves sera destiné à éponger la dette.
Vous êtes invité(e)s à répondre aux préoccupations de AWA en réalisant les tâches ci-après :

Tâches :

1. Déterminer et construire la position Ω du bureau. **2,25 pts**

2. Déterminer l'année au courant de laquelle la dette sera payée. **2,25 pts**

3. Déterminer les entiers naturels a et b représentant respectivement le nombre de manuels scolaires et le nombre de livres de culture générale sachant que :
$$400 < b < a, \quad pgcd(a\,,b) = 11 \quad \text{et} \quad ppcm(a\,,b) = 20\,757.$$ **2,25 pts**

<u>Présentation : 0,5 point</u>