

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

Exercice 1 (6.5points)

I- Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On rapporte le plan complexe d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (1 - \sin \theta)z^2 + (1 - \sin \theta)z - 1$

1. Montrer que $P(z)$ admet une solution réelle $z_0 = \alpha$. **0.5pt**
2. Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$. **1pt**
3. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. **0.75pt**

II- On considère les nombres complexes $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin \theta - i \cos \theta$ et $z_3 = -\sin \theta + i \cos \theta$. B et C sont des points d'affixes respectives z_2 et z_3 .

1. Donner en justifiant la nature du triangle BOC . **0.5pt**
2. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $\frac{z_2^4}{z_3}$ et $z_2 z_3$. **1pt**
3. On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{6}$, et on considère les points E, F et G d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 . h l'homothétie de centre E et de rapport -2 , R la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$, K l'antécédent de G par h et on pose $f = R \circ h$.
 - (a) Déterminer les entiers naturels p tels que z_2^p soit un nombre imaginaire. **0.75pt**
 - (b) Déterminer les écritures complexes de h et R puis enduire l'affixe de K . **0.75pt**
 - (c) Déterminer $f(K)$ et déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . **0.75pt**
 - (d) Donner l'expression analytique de f et en déduire l'image (D') de la droite (D) d'équation cartésienne $x - y = 3$. **0.5pt**

Exercice 2 (4.75points)

1. Soit a, b et c trois relatifs non nuls.
 - (a) En utilisant le théorème de BEZOUT, démontrer que si a divise bc et $\text{PGCD}(a; b) = 1$ alors a divise c . **0.5pt**
 - (b) Démontrer que si b divise a et c divise a et $\text{PGCD}(b; c) = 1$ alors bc divise a . **0.5pt**
2. On considère l'équation $(E) : 11x + 8y = 79$
 - (a) Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$. **0.5pt**
 - (b) Résoudre alors dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) . **0.5pt**
3. Le prix total de 41 pièces détachées en trois lots est de 4800Fcfa. Le prix d'une pièce du premier lot est de 480Fcfa, le prix d'une pièce du deuxième lot est de 360Fcfa, et le prix d'une pièce du troisième lot est de 40Fcfa. Déterminer le nombre de pièce de chaque lot. **0.5pt**

4. Trouver tous les couples d'entiers $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $PPCM(x; y) + 11PGCD(x; y) = 203$. **0.75pt**
5. Trouver tous entiers naturels a et b tels que : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5409 \\ PPCM(x; y) = 360 \end{cases}$ **0.75pt**
6. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 le système de congruence suivant : $\begin{cases} 3x - y \equiv 1[5] \\ x + 2y \equiv 0[5] \end{cases}$ **0.75pt**

Exercice 2 (3.75points)

On considère la suite (U_n) définie par $u_0 = 1$ $U_n = \sqrt{U_{n-1} + 12}$

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 4$. **0.5pt**
 - (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est croissante. **0.5pt**
 - (c) Déduire que la suite (U_n) est convergente. **0.25pt**
 - (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} |U_n - 4|$. **0.5pt**
 - (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - 4| \leq \frac{3}{4^n}$ et Déduire la limite de (U_n) . **0.5pt**
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17. **0.5pt**
3. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \sum_{k=1}^n (2k-1)(-1)^{k-1} = n \times (-1)^{n-1}$. **0.5pt**
 - (b) Calculer la somme $S = 29 - 31 + 33 - 35 + \dots + 61$. **0.5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES :5points

Le BINAM est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 FCFA pour les hommes et 700 FCFA pour les femmes. Pour sa fête de fin d'année, Mr. ENDALLE, parrain du BINAM désire offrir des tee-shirts coûtant 5000FCFA l'unité aux hommes et des pagnes 7500FCFA l'unité aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres du BINAM s'élèvent à 20 000FCFA. Durant une causerie avec les membres du BINAM, Mr. ENDALLE leur révèle qu'à ses débuts, il a été recruté dans une entreprise pour un salaire annuel de 2 000 000 FCFA. Par ailleurs, cette entreprise augmente le salaire de ses employés de 2% par rapport à l'année précédente. Après avoir passé des années dans cette entreprise sans percevoir le moindre sous depuis la signature de son contrat, il reçoit un matin 8 250 000 FCFA. Mr. ENDALLE a une entreprise de fabrication des objets de décoration à partir des matériaux de récupération. Une étude sur un objet spécifique a donné lieu à des résultats suivants où le prix du kg est exprimé en milliers de francs CFA et les quantités offre et demande sont exprimés en kg

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Offre de demande y_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

1. Quel somme dépensera M. ENDALLE pour l'achat des tee-shirts et pagnes ? **1.5pt**
2. Combien d'années au total a passé Mr ENDALLE sans salaire dans cette entreprise ? **1.5pt**
3. Quel est le prix proposé lorsque la quantité offre de demande est de 2 ? **1.5pt**

Présentation :**0.5pt**