COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	**Fiche de travaux dirigés pour les congés de noël**	**Niveau PD-TI**

EXERCICE 1 :

I. a) Résoudre dans ℝ, l'inéquation suivante : $\sqrt{2(x^2-1)} \leq x-1$

b) Résoudre dans ℝ × ℝ le système linéaire suivant (S): $\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{9y+1}{3} = \frac{41}{6} \\ x-1-\frac{9y+2}{3} = \frac{22}{3} \end{cases}$

II. On considère le polynôme P tel que $P(x) = x^3 - 6x^2 - 51x + 280$.

1) On admet que ce polynôme a trois racines $a, b\ et\ c$. Sans calculer les racines, déterminer :
$a+b+c$; $a \times b \times c$; $ab + ac + bc$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
2) Déterminer trois réels $a, p\ et\ q$ tels que $P(x) = (x+a)^3 + p(x+a) + q$
3) On pose $X = x + a$. Résoudre l'équation $X^3 + pX + q = 0$
4) Factoriser alors $P(x)$
5) Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

III. Soit (E) l'équation : $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.

1. Résoudre dans ℝ, puis dans ℚ l'équation (E).
2. On pose $u = a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des nombres rationnels non nuls tels que : $u^2 = 45 - 20\sqrt{5}$
   a) Montrer que le couple (a,b) vérifier le système $\begin{cases} ab = -10 \\ a^2 + 5b^2 = 45 \end{cases}$.
   b) En déduire que b vérifie l'équation (E), puis donner la valeur exacte de a et b.

EXRCICE 2 :

1) Déterminer une équation de second degré admettant pour racine $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$.
2) Résoudre dans ℝ l'équation $\sqrt{5x-9} = 2(x-3)$.
3) On donne l'équation (E): $x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$
   i) Vérifier que 1 est une racine de cette équation.
   ii) Déterminer deux réels a et b tels que les polynômes
   $x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ et $(x-1)(x^2 + ax + b)$ soient égaux.
   iii) Résoudre dans ℝ l'équation (E)
4) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$
5) On considère les systèmes (S): $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x+2y+z=-4 \\ 49x+7y+z=6 \end{cases}$ et (S') $\begin{cases} x^2+2y+z^2=-3 \\ 4x^2+4y+z^2=-8 \\ 49x^2+14y+z^2=-3 \end{cases}$
   a) En utilisant la méthode du pivot de GAUSS, Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système (S').
6) Résoudre dans $IR \times IR$, suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

EXERCICE 3 :

1) a) Démontrer que $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ avec x différents des réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

2) On considère l'équation (E) : $\cos x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin x - 1 = 0$

a) Montrer que (E) est équivalent à $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{8})$

b) Résoudre alors l'équation (E) dans $[0;\pi[$

c) Déterminer les solutions dans $[0;\pi[$ de l'inéquation (I) : $\cos x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin x - 1 > 0$

3) On pose $R(x) = \cos 2x - \cos x + 1$.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de $\cos x$ seulement

b) Résoudre alors dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $R(x) = 0$

c) Résoudre alors dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $Q(x) \leq 0$

4) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\frac{2\cos x - 1}{2\sqrt{3}\sin x + 3} \leq 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-contre (E_1): $x^2 - 2x + \sin^2 a = 0$ et (E_2) : $x^2 + 2x + \cos^2 a = 0$

<u>EXERCICE 4</u> :

A- x est un nombre réel bien défini

1) a) Montrer que $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$

b) En déduire que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

2) Résoudre alors dans $]-\pi\,;\,\pi[$ l'équation $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8}$

B-1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2t^2 + \sqrt{3}\,t - 3 = 0$

2) Déterminer deux nombres a et φ tel que pour tout réel x, on ait :

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = a\cos(x - \varphi)$

3) a) Utiliser les résultats des questions 1) et 2) pour résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ l'équation :

(E) : $\left(2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2}\right) = 0$

b) Représenter les images des solutions obtenues dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ de (E) sur un cercle trigonométrique

C- 1) Calculer $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} a + b = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

3) En déduire les solutions dans $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ du système $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

<u>EXERCICE 5</u> :

1) Soit n un entier naturel

a) Donner la valeur exacte en fonction de n de la somme : $S_n = A_n^0 + \frac{3}{1!}A_n^1 + \frac{3^2}{2!}A_n^2 + \frac{3^3}{3!}A_n^3 + \cdots + \frac{3^n}{n!}A_n^n$.

b) Donner la valeur exacte du produit des nombres impairs consécutifs suivant en fonction de n :
$P = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)$.

2) Dans un pays, la plaque d'immatriculation d'une voiture comporte deux lettres distinctes de O, I et U (pour éviter la confusion avec 0, 1 et V) ; puis trois chiffres pris entre 0 et 9 (0 et 9 inclus) et en suite deux lettres distinctes de O, I et U. Ce pays compte actuellement 72 millions d'habitants. Ce système de plaque permet-il de fournir une plaque d'immatriculation à chaque habitant ? justifier clairement votre réponse.

3) Huit nageurs dont un camerounais participent à une compétition. Un podium est constitué du premier, du deuxième et du troisième. Il n'y a pas d'ex-aequo.
   a) Combien y a-t-il de podiums possibles ?
   b) Déterminer le nombre de podiums possibles sachant que le nageur camerounais en fait partie.

EXERCICE 6 :

I/ Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?

3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

II/ Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

III/ Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

IV/ Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

V/ 1) On tire successivement et au hasard 3 jetons d'un sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer le nombre de possibilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

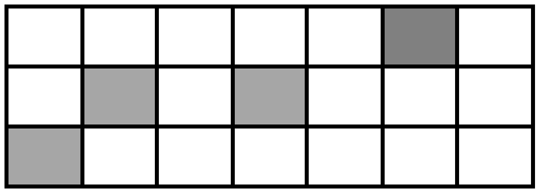
Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

VI/ Dans une urne se trouvent 9 boules : 4 boules rouges numérotées 0 ;1 ;1 ;2 ; 3 boules vertes numérotées 1 ;2 ;2 et deux boules noires numérotées 1 ; 3. On en tire 3 boules de l'urne et on considéré les évènements suivants : A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes. Deux à deux » ; B « obtenir trois boules qui portent le même numéro ; C « la somme des numéros des boules tirées est égale à 4 » ; D « obtenir au moins une boule rouge » Trouver le nombre de possibilités des évènements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :

1)Tirage de 3 boules simultanément

2)Tirage de 3 boules Successivement Avec remise

3)Tirage de 3 boules Successivement sans remise



VII/ On a une grille de : $7 \times 3 = 21$ (voire le schéma)

1) On colore par le noire 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2) Maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

EXERCICE 7 :

On lance deux fois de suite un dé pyramidal à cinq faces numérotées $1,\ 2,\ -1, 4\ \ et - 2$. On désigne par α le numéro obtenu au premier lancé et β le numéro obtenu au deuxième lancé. On considère le triangle ABC rectangle et isocèle en B. I est le milieu du segment $[AC]$. On désigne par (E) l'équation $x^2 - \beta x + \alpha = 0$.

Soit $F = \{1,\ 2, -1, -2, 4\}$

1) Déterminer le nombre de résultat possibles.
2) Déterminer trois sous-ensembles de F formant une partition de F
3) Déterminer en justifiant :
a) Le nombre de couples (α, β) pour lesquels (E) admet une racine double.
b) Les couples (α, β) pour lesquels (E) n'a pas de racine.
c) Le nombre de couples (α, β) pour lesquels Les points pondérés (A, α) et (B, β) admettent un barycentre
d) Les couples (α, β) pour lesquels les points pondérés (A, α) et (B, β) admettent un barycentre n'appartenant pas au segment $[AB]$
e) Les couples (α, β) pour lesquels l'ensemble des points M du plan tel $\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right\| = AI$ soit un cercle circonscrit au triangle ABC :

EXERCICE 8 :

A et B sont deux points distincts du plan, I milieu de $[AB]$; K le barycentre des points $(A, 2); (B, -1)$ $AB = 4cm$, M est un point quelconque du plan

1) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 16$ ainsi que l'ensemble (F) des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$

2) on note (Γ_t) l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = t$ avec $t \in \mathbb{R}$ Déterminer (Γ_o) et (Γ_{-4})

3) Nous désirons trouver l'ensemble (Ψ) des points M tels que $MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

a) Démontrer que si $MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0$

b) En déduire la nature et la construction de (Ψ).

4) Déterminer et construire l'ensemble (H) des points M tels que $2MA^2 - MB^2 = 16$

EXERCICE 9 :

I/ Dans le plan, on considère les points ,B et G tels que $AB = 6cm$ et $G = bar\{(A, 1); (B, 3)\}$

1) Construire le point G.
2) Soit (E) des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = 108$.

a) Montrer que le point A appartient à l'ensemble (E).

b) Montrer que $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + \frac{3}{4}AB^2$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (E).

II/ On considère les points $A(4,-3); B(0,3)$; $C(-3,1)$ et $G = bar\{(A,1);(B,-3);(C,4)\}$ dans un du repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = \alpha$ où$\alpha \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les coordonnées du point G et calculer les distances GA ; GB et GC
2) Démontrer que $MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 2MG^2 - 26$
3) Déterminer suivant les valeurs de α l'ensemble (Γ)
4) Déterminer α pour que l'ensemble (Γ) passe par l'origine du repère.

III/ A-) L'unité de longueur est le cm. ABC est un triangle tel que AB = 5 , AC = 4 et BC = 6. On définit les points I, J et K tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure que l'on complètera.
2. Écrire I comme barycentre des points B et C ; puis J comme barycentre de A et B ; et enfin K comme barycentre de A et C.
3. Montre que les droites (AI), (BK)et (CJ) sont concourantes en un point G.

B-) ABC est un triangle rectangle en C tel que : BC = 2 ; AC = 6. On note I le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, 5) et (C, -3). Soit J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

1) Montrer que J est barycentre des points B et C affectés des coefficients que l'on déterminera.
2) Démontrer que les points A, I et J sont alignés. Que représente J ?
3) Construire le triangle ABC et placer les points I et J.

IV) Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 6cm$ et f l'application du plan telle que $f(M) = MA^2 + MB^2$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $36 \leq MA^2 + MB^2 \leq 146$.

<u>EXERCICE 10</u>:

1) On considère l'application f: $[2; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[$ définie par $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$.
  a) Démontrer que f réalise une bijection de $[2; +\infty[$ vers $[1; +\infty[$.
  b) En déduire l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f en fonction de x.

2) On considère les fonctions g et h définie respectivement par $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$ et $h(x) = \sqrt{3-2x}$.
  a) Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g$.
  b) Déterminer l'expression de $h \circ g(x)$ en fonction de x.

3) Soit E un ensemble non vide. On considère trois applications m, n et q definie de E vers E. On suppose que $m \circ n = m \circ q$.
  Démontrer que $n = q$ si et seulement si m est une application injective.

<u>EXERCICE 11</u> :

Soient g, h et t les fonctions définies par : $t(x) = \frac{x^2+6|x|-4}{|x|-9} - \sqrt{|x|}$; $h(x) = \frac{1}{x}$;
$g(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$; . On désigne par (C_g) et (C_h) les courbes représentatives respectives des fonctions g et h dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O; I; J)$.

1. a) Montrer que le point $A\binom{-1}{-2}$ est centre de symétrie à la courbe (C_g).

b) Démontrer que $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est bijective et définir sa bijection réciproque.

2) a) Déterminer deux réels a et b tels que $g(x) = h(x-a) + b$.
  b) Montrer alors que C_g est l'image de C_h par une transformation à déterminer.

3) Construire C_h ,et C_g dans le même repère

4) a) Déterminer l'ensemble de définition de t.

b) Étudier la parité de t et déduire l'élément de symétrie à la courbe de t.

5) Déterminer l'ensemble de définition de goh et determiner l'expression de $goh(x)$.

EXERCICE 12 :

On considère la fonction $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$ et les fonctions g et h définies par : $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ et $h(x) = \frac{5}{x}$. On désigne par (C_f), (C_g) et (C_h) les courbes respectives des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

2) Par quelle transformation obtient-on la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} par (C_f) ?

3) a) Vérifier que $g(x) = h(x-2) + 1$.

b) En déduire que (C_g) est l'image de (C_h) par une transformation du plan que l'on précisera

4) Montrer que le point $\Omega(2,1)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_g) de g.

5) a) On pose $t(x) = f\ o\ h(x)$. Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Exprimer $t(x)$ en fonction de x.

6) On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = x + \sqrt{|x^2 - 4|}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Écrire les restrictions de φ respectivement sur les intervalles $]-\infty; -2]$; $[-2; 2]$.

7) On considère la fonction k définie par $k(x) = |x^2 - 7x + 6|$.

Déterminer un polynôme du second degré P ayant même restriction que k à l'intervalle $[1; 6]$.

EXERCICE 13

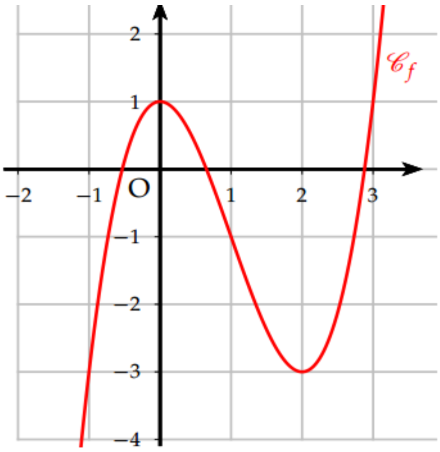
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et par représentée ci-dessous.

Déduire les courbes des fonctions g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = |f(x)|$

c) $k(x) = f(-x)$



ACTIVITÉS D'INTEGRATIONS.

Activité 1

Situation :

Mr Michel est propriétaire d'un terrain représenté sur le plan d architecte ci-dessous. Il aimerait aménager trois parcelles pour les cultures. Sur la première parcelle délimitée par le cercle (C) correspondant à l ensemble des points M du plan tels que $MI^2 + MJ^2 = 272$ avec $IJ = 12$ m, il veut cultiver du haricot à raison de15 plants par m². Sur la deuxième parcelle représentée par le rectangle EFGH de périmètre 112m dont la mesure d'une diagonale est de 40 mètres, il veut cultiver les arachides à raison de 10 plants par m². Sur la troisième parcelle délimitée par le cercle (C′) correspondant à l ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 375$ avec $AB = 10$m ; il veut cultiver des papayes a raison de 5 plants par m².

Tâches :

1. Aider Mr Michel à trouver le nombre de plants de haricots qu'il pourra cultiver.
2. Aider Mr Michel à trouver le nombre de plants d'arachides qu'il pourra cultiver.
3. Aider Mr Michel à trouver le nombre de plants de papayes qu'il pourra cultiver.

Activité 2

Monsieur ABENA est directeur d'un magasin de fabrication et de vente des jouets en bois. La machine permettant de découper le bois utilise 4 batteries et la charge d'une batterie dépend de la tension U en volts qui est appliquée et qui est une fonction du temps t en seconde définie par $U(t) = 12\cos t$. La charge des batteries n'a lieu que si la tension totale est supérieure à 24 volts. Par ailleurs, ce magasin compte 9 employés dont n filles. Le directeur voudrait former un bureau constitué d'un chef et son adjoint pour gérer ses employés ce bureau aura exactement une fille et le nombre possible de bureau est de 40. DEMAKA, employé de ce magasin, est un éleveur et il souhaite protéger son bétail avec trois rangés de fils barbelés dont le mètre est vendu à 1950 FCFA. Son enclos est donné par l'ensemble des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\| = 100$. Pour cela, M. DEMAKA a prévu une somme de 650 000FCFA.

Tâches :

1) Déterminer l'intervalle de temps contenu dans [0 ; 2π] dans lequel la charge s'effectue.
2) Déterminer le nombre d'employés filles dans ce magasin.
3) La somme que possède DEMAKA est-elle suffisante pour protéger son bétail ?