COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail :mail:collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025 Classe : Terminale D-TI
Département de MATHEMATIQUES	TRAVAUX DIRIGES NÖEL	Durée : 8 h

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = 3 - 2x^2 \ \ si\ x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x}\ \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f et en déduire les branches infinies
2. Etudier la continuité de f.
3. Etudier la dérivabilité de f et en déduire que la courbe de f admet deux demi tangentes au point d'abscisse zéro.
4. Etudier les variation de f et tracer sa courbe.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{sinx}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à déterminer.
2. On désigne par g la fonction reciproque de f, calcuer $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.
3. Montrer que g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie pour tout réel $x \in I =]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

Partie A

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe contant sur I.
2) Etudier les variations de f sur I, et dresser le tableau des variations.
3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]1;2[$
4) Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ pour tout réel $x \in I$

Partie B

5) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
6) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations. Vérifier que $g(\beta) = \beta$
7) Montrer que h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
8) Déterminer pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x)$.

Partie C

9) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
10) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{2}|x - \beta|$.
11) On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|g(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

NOMBREXES COMPLEXES ET TRANSFORMATION DU PLAN

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé d'origine le point O.

Exercice 4 :

Soit S, la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(5-i)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - z^2 - (5+4i)z - 12i + 21 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
3. Déterminer l'expression analytique de S.
4. On considère les points $A, B, C, et\ E$ d'affixes respectives, $3+2i$, -3, $1-2i$ et $5-4i$.

a) Faire la figure à compléter au fur et à mesure.
b) Vérifie que $S(B)=C$ et donne la nature du triangle ABC.
c) Déterminer l'affixe du point D, image du point C, par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
d) Démontrer que le quadrilatère $ABDE$ est un carré.

5. Le cercle (C) de centre C, passant par le point A, coupe l'axe des réels en deux points K et L. l'affixe de K est positive. Démontrer que le triangle KCL est isocèle en C.

Exercice 5 :

On considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = 6+2i$ et $z_B = 2+4i$.

1. Donner la nature du triangle AOB.
2. Donner l'affixe du point B' image du B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de l'affixe du point A' image du A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. Placer tous les points précédents sur une figure.

a) Déterminer l'affixe du point M milieu du segment, $[A'B']$.
b) Justifie que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires. Que représente la droite (OM) pour le triangle ABC.

Exercice 6 :

On considère la suite (z_n) définie par $Z_0 = -2$ et $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$. On désigne par z_n L'affixe du point M_n.

1. Justifie que le point M_{n+1} est l'image du point M_n par une transformation S que l'on précisera.
2. Déterminer l'image par S de la droite d'équation $y - x = 2$.
3. On pose $V_n = |z_n|$ et $U_n = arg(z_n)$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison et de premier terme à déterminer. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
b) Montrer que la suite (U_n) est arithmétique de raison et de premier terme à déterminer. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles M_n est situé sur l'axe des réels.
d) Déterminer les valeurs de n pour les quelles M_n appartient à l'axe des abscisses.

4. Calculer $A = \frac{z_n - z_{n+1}}{z_n}$ et en déduire la nature exacte du triangle OM_nM_{n+1}.
5. On pose $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$.Calculer L_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (L_n)

ARITHMETIQUE

Exercice 6 :

1. Déterminer les entier relatifs n, vérifiant $n^2 + 2n = 35$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation : $xy - 5x - 5y = 7$.
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.
4. Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de -5000 par 17.
5. La division euclidienne de 900 par un entier naturel b, a pour qoutient 14 et pour reste r, quelles sont les valeurs possibles de b et r.
6. Soit $a, b\ et\ c$ trois entiers relatifs non nuls.
   a) Démontrer que si bc divise a, alors b divise a et c divise a.
   b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7 :

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9 puis Démontrer que $2005^{2005} \equiv 7[9]$
2. Démontrer en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n, :
   a) $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.
   b) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
3. Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $15 \times 3^n - 3$ est divisible par 7.
4. Donne le chiffre des unités de l'entier naturel $2542^{20} \times 5382^{32}$
5. Un nombre en base 10 s'écrit $\overline{x43y}$. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9.

Exercice 8 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$
2. Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 3 698 953 ; 1 999 ; 71 847; 257 323. Déterminer le nombre de diviseurs de ceux qui ne sont pas premiers.