Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES :   (15 points)

EXERCICE 1 :   (5 points)

A) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(\sqrt{3}+i\right) z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n de module $r_n = |z_n|$ et d'argument $\theta_n = \arg(z_n)$.

1. Ecris le complexe $\omega = \sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique. **0,5pt**
2. Montre que (r_n) est une suite géométrique que tu caractériseras. **0,75pt**
3. Montre que (θ_n) est une suite arithmétique. Précise la raison et son 1[er] terme. **0,75pt**
4. Déduis-en r_n puis θ_n en fonction de n. **0,5pt**

B) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n}$.

1. Calcule U_1 et U_2. **0,5pt**
2. Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq 3$. **0,75pt**
3. Montre que la suite (U_n) est décroissante. **0,5pt**
4. Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite l. **0,75pt**

EXERCICE 2 :   (5 points)

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3i$, $z_B = -2$ et $z_C = 1+2i$.
   - **(a)** Détermine la forme algébrique du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. **0,5pt**
   - **(b)** Déduis-en la nature du triangle ABC. **0,5pt**
   - **(c)** Détermine l'affixe du point D tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré. **0,5pt**
   - **(d)** Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont tu préciseras le centre et le rayon. **0,75pt**
2. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   Soit S l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
   - **(a)** Montre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 2 - i$. **0,75pt**
   - **(b)** Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S. **0,75pt**
   - **(c)** Détermine l'image par S de la droite (d) d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$. **0,5pt**
   - **(d)** Détermine l'ensemble (Γ) des points M dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z + 2 - i| = 2$. **0,75pt**

EXERCICE 3 :   (5 points)

1. Trouve la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ qui s'annule en 1. **1pt**

2. Soit g la fonction définie sur $[0;2]$ par $g(x)=2\sqrt{2x-x^2}$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.
   (a) Montre que g est dérivable sur $I=]0;2[$ et calcule $g'(x)$ pour tout $x\in I$. **0,75pt**
   (b) Dresse le tableau de variations de g. **1pt**
   (c) Construis la courbe C_f. **0,75pt**
   (c) Construis le symétrique de C_f par rapport à l'axe $(O,\vec{i})$. **0,5pt**
3. Soit h la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-contre :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (a) Détermine l'image par h de l'intervalle $[2;4]$. **0,25pt**
   (b) Justifie que h est une bijection de $]-\infty;2]$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
   (c) Quel est le nombre de solution(s) dans $\mathbb{R}$ de l'équation $h(x)=2$? **0,25pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

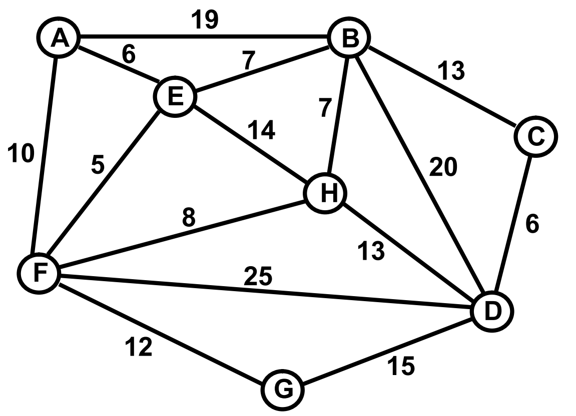
<u>SITUATION</u> :

Une menuiserie fabrique entre 10 et 40 chaises par mois. On estime que le coût de fabrication de x chaises en FCFA est $C(x)=10x^3+5000x+20000$. Chaque chaise fabriquée est vendue au prix de 32000 FCFA. M. ABENA, propriétaire de cette menuiserie souhaite savoir le nombre de chaises que l'on doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal.

Cette menuiserie fabrique aussi des couvre-joints pour décorer les portes. Le prix d'un couvre-joint augmente régulièrement sur le marché depuis maintenant quinze ans. On observe les résultats suivants sur les huit dernières années :

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix y_i en FCFA	1650	1725	1740	1750	1825	1850	1950	1960

A l'aide d'un camion, M. ABENA souhaite partir de sa menuiserie située au sommet A pour acheter des planches au village situé au sommet D (en aller-et-retour) en empruntant le réseau routier représenté par le graphe ci-contre. Les sommets B,C,E,F,G et H sont les différents autres villages ; les arêtes sont pondérées par les distances entre les villages, exprimées en kilomètres.



Tâches :

1. Quel est le bénéfice maximal dégagé avec la vente des chaises en un mois? **1,5pt**
2. Le prix d'un couvre-joint atteindra-t-il 2400 FCFA avant 2032 ? **1,5pt**
3. Quelle est la longueur du chemin que doit emprunter M. ABENA pour éviter de tomber en panne sèche ? *(On justifiera sa réponse à l'aide d'un algorithme)* **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt