COLLEGE PRIVE MONGO BETI B.P 972 TEL22 22 46 19 YAOUNDE					
ANNEE SCOLAIRE	SEQUENCE	EPREUVE	CLASSE	DUREE	COEF
2024/2025	4	MATHEMATIQUES	Tle C	4H	7
Nom du professeur: M. KAMTO					

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15,5pts

EXERCICE 1 3,5pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f la transformation du plan qui, à tout point M de coordonnées $(x;y)$ associe le point M' de coordonnées $(x';y)$ telles que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - y) \\ y' = \frac{1}{2}(x - y\sqrt{3}) \end{cases}$

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer z' en fonction de z et déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques. 1pt

2. On définit une suite des points (M_n) de la manière suivante : M_0 est le point d'affixe i et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n

2.1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. 0,5pt

2.2) Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si $n - p$ est multiple de 12. 0,75pt

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $12x - 5y = 3$. 0,75pt
4. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. 0,5pt

EXERCICE 2 :(3 points)

Une urne contient 2 boules blanches numérotées 1 et 2 ; 3 boules rouges numérotées 1 ;2 et 3 toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1- Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants

A : «les deux boules sont de même couleur » 0,5pt

B : « les deux boules portent le même numéro » 0,5pt

C : « On a tiré exactement une boule blanche et exactement une boule portant un numéro impair » 0,75pt

2-Un joueur tire simultanément deux boules au hasard de cette urne. Il reçoit 500 FCFA par boule blanche tiré, 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le 2 et perd 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le numéro 1. La boule rouge numéro 3 ne rapporte rien. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

a) Donner la loi de probabilité de X. 0,75pt

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Ce jeu vous semble-il avantageux pour le joueur ? Justifier votre réponse. 0,5pt

EXERCICE 3 8,25pts

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x}$ et $(\mathscr{C}f)$ sa representation graphique dans le repère orthonormé (O,I,J), unité graphique 1cm sur les axes.

Partie A/ Etude d'une fonction auxiliaire. 4pts

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. 0,5pt
2) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. 0,5pt

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,30 < \alpha < 1,35$. 0,5pt

4) Etudier le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$... 0,5pt

5) Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto x \ln x - x$ puis en déduire la primitive G de la fonction g qui prend la valeur $\frac{1}{3}$ en 1.

0,5pt

6) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I = [1,30; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ équivaut à $h(x) = x$. 0,25pt

b) Etudier les variations de h sur I puis montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$. 0,5pt

c) Montrer que $\forall x \in I$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$. 0,25pt

d) En déduire que $\forall\, x \in I, |h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$. 0,5pt

Partie B / Etude de la fonction f: 4,25pts

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5pt

2) a) Exprimer la dérivée $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ puis en déduire le sens de variation de f. 0,75pt

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,25pt

3) Soit (D) la droite d'équation $y = x$

a) Déterminer les coordonnées du point B intersection de (D) et $(\mathscr{C}f)$. 0,5pt

b) Préciser la position relative de $(\mathscr{C}f)$ par rapport à (D). 0,5pt

c) Montrer que la droite (D) est asymptote à $(\mathscr{C}f)$ en $+\infty$. 0,5pt

d) Construire $(\mathscr{C}f)$. 0,5pt

e) Calculer l'aire en centimètre carré du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}f)$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = e$ et $x = 5$ 0,75pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 5 points

Compétences à évaluer : Résoudre une situation problème à l'aide du langage mathématique dans les situations de vie où interviennent les équations du second degré dans $\mathbb{C}$, les lignes de niveau associées au nombres complexes.

Mr. EBANGA a un jardin triangulaire dont un sommet est repéré par son affixe 2-3i et les deux autres sommets sont solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$.Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coute 2500fcfa. Il dispose une somme de 25000fcfa.

Mme BILOA a une plantation dont la forme est celle de l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4i| = 7$. Elle souhaite la clôturer avec du fil dont le mètre coûte 350fcfa et elle a prévu faire deux rangées de fil. Sachant qu'elle dispose d'une somme de 30000fcfa.

Mr MOUSSA quant à lui possède un terrain situé au quartier administratif dont la forme est celle de l'ensemble des points M d'affixe z distinct de $(-1 + 2i)$ tels que $\frac{z-7+4i}{z+1-2i}$ soit imaginaire pur. Il souhaite l'hypothéquer avec une voiture dont la valeur est estimée à 1170000fcfa. Sachant que son terrain a une valeur de 15000fcfa le mètre carré.

L'unité de mesure est le mètre, on prendra $\pi = 3,14$.

Tâches :

1) Mr. EBANGA pourra t'il clôturer son jardin ? 1,5pt

2) L'argent de Mme BILOA sera-t-il suffisant pour protéger sa plantation ? 1,5pt

3) Mr MOUSSA réussira-t-il à être propriétaire de ce véhicule ? 1,5pt

BONNE CHANCE