Exercices de Géométrie Analytique et de Géométrie Plane

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le cm. ABC est un triangle tel que AB = 3,75 ; AC = 6,25 et BC = 5. E est le point du segment [BC] tel que BE=2 ; la droite (D) passant par le point E et perpendiculaire à (BC) coupe [AC] en F.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

CORRIGÉ EXERCICE 1

1. *Figure : Voir figure réalisée à la main.* (On doit dessiner le triangle et les points comme expliqué dans la réponse précédente.)
2. Pour démontrer que ABC est un triangle rectangle, nous allons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore :

   - Calculons les carrés des longueurs des côtés :

   $$AB^2 = 3,75^2 = 14,0625$$
   $$AC^2 = 6,25^2 = 39,0625$$
   $$BC^2 = 5^2 = 25$$

   - Vérifions si la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du plus grand côté :

   $$AB^2 + BC^2 = 14,0625 + 25 = 39,0625$$

     Nous remarquons que $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

   Conclusion : D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J). On donne les points A(3;1), B(2 ; 4) et C(3; 1) ; puis la droite (D) d'équation 3x 2y 7 = 0.

1. Montrer que le point A appartient à (D).
2. Placer les points A , B et C , puis tracer la droite (D) dans le repère orthonormé (O ; I ; J).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') passant par B et perpendiculaire à (D).

CORRIGÉ EXERCICE 2

1. Pour montrer que le point A appartient à (D), remplaçons x et y dans l'équation de (D) par les coordonnées de A :

   $$3(3) - 2(1) - 7 = 9 - 2 - 7 = 0$$

   Puisque le résultat est 0, le point A vérifie l'équation de la droite (D).

   Conclusion : Le point A appartient à la droite (D).
2. *Figure : Voir figure réalisée à la main.* (On doit dessiner le repère, les points et la droite comme expliqué dans la réponse précédente.)

3. Déterminons une équation cartésienne de la droite (D') passant par B et perpendiculaire à (D).

- **Condition de perpendicularité :** Si (D) et (D') sont perpendiculaires, alors le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
- **Coefficient directeur de (D) :** L'équation de (D) est 3x - 2y - 7 = 0. Réécrivons-la sous la forme y = mx + b (où m est le coefficient directeur) :

$$\begin{aligned} -2y &= -3x + 7 \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

  Le coefficient directeur de (D) est donc $m = \frac{3}{2}$.
- **Coefficient directeur de (D') :** Soit m' le coefficient directeur de (D'). Alors $m \cdot m' = -1$.

$$\frac{3}{2} \cdot m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{2}{3}$$

- **Équation de (D') :** Nous savons que (D') passe par B(-2 ; 4) et a un coefficient directeur de $-\frac{2}{3}$. Nous pouvons utiliser la forme point-pente de l'équation d'une droite :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - (-2)) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 2)$$

- **Équation cartésienne de (D') :** Transformons l'équation précédente pour obtenir une équation de la forme ax + by + c = 0 :

$$\begin{aligned} 3(y - 4) &= -2(x + 2) \\ 3y - 12 &= -2x - 4 \\ 2x + 3y - 12 + 4 &= 0 \\ 2x + 3y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation cartésienne de la droite (D') est $2x + 3y - 8 = 0$.