MANI EMANDA FRANÇOIS MIELS PC

COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	MINI SESSION-Novembre 2024	Situation 2

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : PC et PCE **Durée : 3 heures** **coefficient : 6**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (05,00 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} x = 3 - 10\sin^2\alpha \\ y = -2 + 10\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout nombre réel α, $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ et $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **0,75pt**
2) En déduire que les coordonnées $(x;y)$ de M vérifie le système : $\begin{cases} x = -2 + 5\cos 2\alpha \\ y = -2 + 5\sin 2\alpha \end{cases}$. **0,5pt**
3) Montrer qu'une équation cartésienne de (C) est : $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. **0,5pt**
4) Justifier que $(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r. **0,75pt**
5) Vérifier que le point $A(8;\ 3)$ n'appartient pas à $(\mathcal{C})$, puis déterminer l'équation normale de chaque tangente à (C) passant par A. **1,25pt**
6) Déterminer l'aire de l'ensemble des points définis par l'intersection des disques de frontières les cercles d'équations respectives :
$(\mathcal{C}_1)$: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ $(\mathcal{C}_2)$: $x^2 + y^2 - 30x + 4y + 139 = 0$. **1,25pt**

EXERCICE 2 : (05,00 points)

On considère le système (S_1): $\begin{cases} cos(x+y)cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} \\ cos^2(x+y) - sin^2(x-y) = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Soit $(p;q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos p + \cos q$. **0,25pt**
2) Justifier que $\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}[\cos(2x) + \cos(2y)]$. **0,5pt**
3) Démontrer que $cos^2(x+y) - sin^2(x-y) = [cos^2x - sin^2x][cos^2y - sin^2y]$. **1pt**
4) En déduire que (S_1) est équivalente au système (S_2): $\begin{cases} \cos(2x) + \cos(2y) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \\ \cos(2x)\cos(2y) = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$. **0,5pt**
5) Sachant que $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{6}$, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a + b = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$. **0,75pt**
6) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S_2). **1,25pt**
b) En déduire les solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ du système (S_1). **0,75pt**

EXERCICE 3 : (05,00 points)

1) On considère la somme $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ où n est un entier naturel.
a) Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que $S = 3^n$. **0,5pt**
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$. **0,5pt**

2) Soient k, p et n trois entiers naturels tels que : $0 \leq k \leq p \leq n$.

   a) Montrer que : $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$. **0,75pt**

   b) En déduire en fonction de n et p la valeur de la somme $S = \sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k}$. **0,5pt**

3) Un sac contient 5 boules rouges, 4 boules blanches et 2 boules vertes. On tire successivement et sans remise 3 boules du sac.

   a) Donner le nombre de tirages contenant une seule boule rouge. **0,5pt**

   b) Donner le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche. **0,5pt**

   c) Donner le nombre de tirages contenant des boules de couleurs toutes différentes. **0,5pt**

4) Dans une classe de 21 élèves il y'a 3 tricheurs. Le surveillant choisit 5 élèves au hasard. Chaque tricheur porte le numéro 1 et chaque non tricheur porte le numéro 0. À chaque choix de 5 élèves, le surveillant fait correspondre la somme X des numéros obtenus.

   a) Justifier clairement que X$\in \{0; 1; 2; 3\}$. **0,5pt**

   b) Déterminer le nombre de choix possible pour chaque valeur prise par X. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (05 POINTS)

Situation :

Madame KANA possède un terrain qu'elle a acquisse en 2023 pour en faire un Verger (espace dévolu à la culture d'arbres fruitiers). L'unité étant le décamètre, les sommets de ce terrain sont les points images des solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation $3tan^2x - 1 = 0$ sur le cercle trigonométrique. Au moment de l'acquisition, le mètre carré de ce terrain coûtait 15 000 FCFA.

Soucieux de ses finances et d'une bonne production à moindre coût dans son verger, le moniteur agricole de son quartier lui propose d'utiliser les engrais organiques (fumier, campos, ...). Pour cela, elle doit mettre des déchets d'ordure dans des vieux fûts cylindriques afin d'obtenir une meilleure production en engrais. De manière rationnelle, 20 décimètres cube d'engrais organique est l'équivalent d'un sac de 50 kg d'engrais minéraux. Madame KANA dispose de deux fûts dont la somme des aires de leur surface de base est de 22 200 centimètres ~~cube~~ carré et la somme de leurs rayons de base est de 120 centimètres. La hauteur du fût ayant le plus grand rayon est de 200 centimètres et l'autre a une hauteur de 150 centimètres. Ce verger a besoin de 150 sacs d'engrais minéraux par an.

Madame KANA possède également une entreprise comptant 800 employés répartis à travers tout le pays parmi lesquels 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Pour la rencontre annuelle des célibataires, Madame KANA a décidé de faire participé toutes les femmes célibataires non syndiqués de son entreprise. Pour chaque participante, l'entreprise doit payer 15 000 Francs et pour avoir cette somme, chacune d'entre elles a contribué à hauteur de 5 500 Francs, puis madame KANA a complété le reste.

On prendra $\pi = 3$.

TACHES :

1) Déterminer le montant déboursé par madame KANA en 2023 pour acquérir son terrain. **1,5pt**

2) Après combien d'années la quantité d'engrais d'une production par les deux fûts sera-t-elle épuisées ? **1,5pt**

3) Déterminer le montant donné par madame KANA pour la participation à la rencontre annuelle des célibataires. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt