COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	**Fiche de travaux dirigés pour les congés de noël**	**Niveau PC-PCE**

EXERCICE 1 :

1) On considère le polynôme K défini par $K(x) = x^2 + (1+\sqrt{2})x + 2(\sqrt{2}-1)$.

a) Vérifier que $11 - 6\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $K(x) < 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et l'inéquation (I) ci-dessous.

(E): $\sqrt{\frac{4}{3}x + 5} = 2x - 3$ et (I): $\sqrt{2-x} \leq x - 4$

3) On considère les systèmes (S'): $\begin{cases} x - y = -\frac{m}{2} \\ 4x - m^2 y = -4 \end{cases}$ et (S): $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ 2x + 12y - 7z = 2 \end{cases}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ suivant les valeurs du paramètre réel m, le système (S')

b) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

4) Soient p_1, p_2, q_1, q_2 quatre réels. On désigne par E_1 l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ et par E_2 l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$.

a) On suppose $p_1 \neq p_2$. Démontrer que, pour que $E_1 \cap E_2$ soit non vide, il est nécessaire que l'on ait l'égalité : $(q_1 - q_2)^2 - (p_2 - p_1)(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0$.

b) Soit m un réel. On pose : $p_1 = 1 - m$, $p_2 = -m - 3$, $q_1 = -2(m+1)$, $q_2 = 3m$.

i) Déterminer m pour que l'on ait $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

ii) Dans le cas où $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, déterminer les ensembles E_1 et E_2.

EXERCICE 2 :

On considère le polynôme P tel que $P(x) = 10x^3 - 9x^2 + 9x + 1$.

1) En posant $x = y + a$, déterminer le polynôme $Q(y)$ obtenu en remplacant x par $y + a$ dans $P(x)$.

2) Montrer que $Q(y) = 10(y^3 + \alpha y + \beta)$ si et seulement si $a = \frac{3}{10}$; $\alpha = \frac{63}{100}$ et $\beta = \frac{79}{250}$.

3) Déterminer deux réels b et c tels que : $b^3 + c^3 = \beta$ et $-3bc = \alpha$.

4) Prouver que $y^3 - 3bcy + b^3 + c^3$ est factorisable par $y + b + c$.

5) Déduire des questions précédentes que $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{1}{10}$ sont respectivement les racines de $Q(y)$ et $P(x)$.

6) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 3 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considere l'ensemble (C_m) des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0$ où m est un nombre reel.

1) Determiner l'ensemble (C_1).

2) On suppose que $m \in \mathbb{R} - \{1\}$.

a) Montrer que (C_m) est un cercle dont on precisera le centre Ω_m et le rayon R_m.

b) Determiner le lieu geometrique des centres Ω_m lorsque m decrit $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe I que l'on déterminera.

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est tangente à tous les cercles (C_m).

3) On suppose que $m > -\frac{3}{2}$ et $m \neq 1$ et on considere le point $A(0; 1)$.

a) Montrer que A est à l'extérieur des cercles (C_m).

b) Écrire les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C_0) passant par le point A.

EXERCICE 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.on considère le point $A(5; 4)$. (C) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.

1) Montrer que (C) est un cercle puis préciser son centre et son rayon.

2) Vérifier que le point A est situé sur (C) et donner une équation cartésienne de la tangente (T) en A au cercle (C).

3) Déterminer les coordonnées du point E, intersection de (T) avec l'axe $(O, \vec{\imath})$.

4) Soit (D_m) la droite passant par le point $F(0; 8)$ et de coefficient directeur m.

a) Vérifier que F est à l'extérieur du cercle (C).

b) Montrer qu'une équation réduite de (D_m) est : $y = mx + 8$.

c) Montrer que (D_m) rencontre (C) en un point M d'abscisse x si et seulement si on a la relation suivante : $(m^2 + 1)x^2 + 2(7m - 1)x + 25 = 0$.

d) En déduire que (D_m) est tangente à (C) si et seulement si : $12m^2 - 7m - 12 = 0$.

e) Montrer qu'il existe deux tangentes à (C) passant par F et donner les équations de ces deux tangentes.

EXERCICE 5 :

I/ a et b sont deux réels non tous nuls. Et t est nombre réel variables.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} xsint - ycost = -a \\ xcost + ysint = b \end{cases}$ d'inconnues $(x; y)$

2) Démontrer qu'il existe deux réels r et θ tels que les solutions du système précédent s'écrivent : $\begin{cases} x = rcos(t + \theta) \\ y = rsin(t + \theta) \end{cases}$

3) Dans la suite, on suppose que $a = b = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ résoudre $[0; 2\pi[$ le système d'inéquations $\begin{cases} rcos(t + \theta) \geq -1 \\ rsin(t + \theta) < -1 \end{cases}$

4) A et B sont deux points distincts du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{6}$

II) On considère le système (S): $\begin{cases} \frac{tanx}{tany} + \frac{tany}{tanx} = -6 \\ tan^2x + tan^2y = 6 \end{cases}$ où x et y sont des nombres réels.

1) Démontrer que pour tout $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a : $\tan(2\beta) = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$.

2) On pose $a = tanx$ et $b = tany$. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -6 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases}$.

3) Pour chaque valeur de a et b trouvé, calculer $\tan(2x)$ et $\tan(2y)$.

4) En déduire les solutions du système (S) dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 6 :

1) On considère l'équation $(E): 2sinx + cosx = 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On pose $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) Démontrer que $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ et $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $(3t^2 - 1)(t + 1) = 0$.

c) En déduire les solutions dans $[-\pi;\ \pi[$ de l'équation (E).

2) On pose $a = \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

a) Vérifier que $a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire que $cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation : $cosx + sinx = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$.

c) En déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation : $cosx + sinx \leq \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations : $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ cosx + sinx = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

3) Soit ABC un triangle tel que $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$. Démontrer que ABC est équilatéral si les conditions

suivantes sont remplies : $\frac{b^3+c^3}{b+c} = a^2$ et $in\hat{B}sin\hat{C} = \frac{3}{4}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-contre (E_1): $x^2 - 2\,x + \sin^2 a = 0$ et (E_2) : $x^2 + 2\,x + \cos^2 a = 0$

<u>EXERCICE 7</u> :

I/ On considère l'équation $(E): \sin 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Résoudre dans $]-\pi;\ \pi]$ l'équation (E).

2) **a)** Montrer que $\sin 3x = -4\,sin^3x + 3\sin x$ et $\cos 3x = 4\,cos^3x - 3\cos x$.

b) En déduire que $\sin 6x = -4sin^3 2x + 3\sin 2x$.

3) **a)** En posant $t = \sin 2x$, montrer que (E) est équivalente à l'équation $(E'): -4t^3 + 3t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E').

4) En déduire les valeurs exactes de $sin\frac{\pi}{12}, sin\frac{23\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$.

II/ On considère l'équation (E): $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\cos x + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Démontrer que pour tout réel θ, on a : $cos(5\theta) = 16cos^5(\theta) - 20cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$.

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{10}$ est une solution de l'équation : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0$.

4) En remarquant que $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$; En déduire de la question 3) que $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et montrer que $\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation (E).

<u>EXERCICE 8</u> :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(F): x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ sachant que -1 est une solution.

2) a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

$tan3x = \frac{3-tan^2x}{1-3tan^2x}tanx.$

3) Montrer que $\tan\frac{5\pi}{12}$ est solution de l'équation (F).

4) En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

<u>EXERCICE 9</u>

I/ L'unité de longueur est le cm. ABC est un triangle tel que $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{AC} = 4$ et $\mathrm{BC} = 6$. On définit les points I, J et K tels que $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$; $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

1. Faire une figure que l'on complètera.
2. Écris I comme barycentre des points B et C ; puis J comme barycentre de A et B ; et enfin K comme barycentre de A et C.
3. Montre que les droites $(\mathrm{AI}), (\mathrm{BK})$ et (CJ) sont concourantes en un point G.

II/ Soit ABC un triangle, on pose $BC = a,\ AC = b\ et\ AB = c$. On note $A', B'\ et\ C'$ les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC] et\ [AB]$. G Isobarycentre des points $A, B\ et\ C$. k est un réel

1) En utilisant le théorème de la médiane, montrer les égalités suivantes :
   a) $GB^2 + GC^2 = \frac{1}{2}GA^2 + \frac{1}{2}BC^2$
   b) $GB^2 + GA^2 = \frac{1}{2}GC^2 + \frac{1}{2}AB^2$
   c) $GA^2 + GC^2 = \frac{1}{2}GB^2 + \frac{1}{2}AC^2$
2) En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
3) À tout point M du plan, on associe le réel $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
   a) Montrer que pour tout point M du plan, $f(M) = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$
   b) On désigne par (L_k) l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = k$.
   Déterminer suivant les valeurs de k, la nature de l'ensemble (L_k).
   c) On suppose que $a = b = c$ déterminer et construire (L_{4a^2})

<u>EXERCICE 10</u> :

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $BC = a$ où a a est un réel strictement positif. Pour tout réel $\lambda \neq 0$, on considère le système $S_\lambda = \{(A,\lambda);\ (B,1);\ (C,1)\}$. On note G_λ le barycentre du système S_λ et I le milieu du segment $[BC]$.

1) **a)** Pour quelle(s) valeur(s) de λ, G_λ existe-il ?
b) Déterminer et construire l'ensemble (D) des barycentres G_λ lorsque $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2; 0\}$.
c) Déterminer λ pour que le point A soit le milieu du segment $[G_\lambda I]$.

2) Soit (E_m) l'ensemble des points M du plan vérifiant : $4MA^2 + mMB^2 - MC^2 = -a^2$ avec $m \in \mathbb{R}^*$.
a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A appartient-il à (E_m) ?
b) Caractériser puis construire (E_{-1}).

3) Soit (F) l'ensemble des points M du plan vérifiant : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.
a) Vérifier que $B \in (F)$ et $A \notin (F)$.
b) Déterminer alors l'ensemble (F).

<u>EXERCICE 11</u> :

I/ En hiver, une compagnie aérienne dessert 6 villes. En été, cette compagnie a 45 lignes en service. On appelle ligne l'itinéraire emprunté par un avion pour aller d'une ville à une autre, dans un sens ou dans l'autre sans distinguer les cas.

1) Quel est le nombre de lignes en service en hiver dans cette compagnie ?

2) Quel est le nombre de villes desservies en été par cette compagnie ?

II/ Dans le plan euclidien P, on considère le triangle ABC isocèle et rectangle A tel que $AB = AC = 3cm.$ G est le barycentre du système de ponts pondérés $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ et D est le point vérifiant la relation $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

1) Justifier que $D = bar\{(A,3);(B,-2);(C,3)\}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

II- ABCD est un rectangle tel que $AB = 6cm$ et $BC = 4cm$. On considère les points I, J et K tels que $I =$bar$\{(A,-1),(B,4)\}$; $J =$bar$\{(C,2),(D,1)\}$ et $K =$bar$\{(A,-1),(C,2),(D,1)\}$. G est le point tel que $4\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG}$. Soit g l'application du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M du plan associe le réel $g(M) = -AM^2 + 4\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM}$.

1) Montrer que G est le barycentre du système $\{(A,-1),(B,4),(C,2),(D,1)\}$.

2) Montrer que G est le milieu du segment $[IJ]$.

3) Montrer que le point B appartient à la droite (GK) et construire le point G.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

5) **a-**Déterminer $g(A)$ et $g(G)$.

b-Montrer que $g(M) = 6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{GM}$.

c-En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $g(M) = 0$

III/ Une urne contient 7 jetons portant les numéros : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; -1 et -3 , on tire deux jetons successivement sans remise dans cette urne . On désigne par (a) le numéro porté par le premier jeton et par (b) , celui porté par le deuxième jeton . A et B sont deux points fiixes et distincts d'un plan $(\mathcal{P})$.

Déterminer le nombre de couples (a, b) pour lesquels :

1) Les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre

2) Les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycenttre et ce barycentre appartient à [AB]

IV/ ABCD est un rectangle indirect de longueur 4 cm , de largeur 3 cm et de centre O . Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC)

1) En décomposant judicieusement à l'aide de la relation de Chasles les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$,calculer $\overrightarrow{\mathrm{CA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

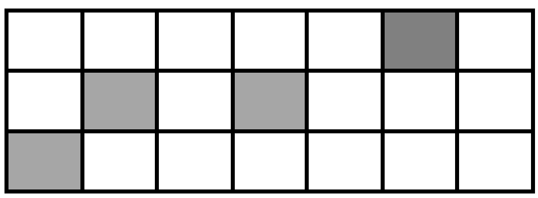
2) En exprimant d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{CA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, déterminer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{BD}}}\right)$

3) a) Montrer que $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MC}^2 = 4\overrightarrow{\mathrm{AO}}.\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Déduire que $\mathrm{DA}^2 - \mathrm{DC}^2 = -7$

b) En déduire l'ensemble (d) des points M du plan tels que $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MC}^2 = -7$

<u>EXERCICE 12</u> :

On a une grille de : $7 \times 3 = 21$ (voire le schéma)



1) On colore par le noire 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2) Maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

EXERCICE 13 :

I/ On note S l'ensemble des fonctions definies sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -1$ et pour tout réel x non nul, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Soit $f \in S$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

2) Montrer que pour tout réel x non nul, $f(-x) - f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

3) En deduire que :

a) Si $f \in S$ et f paire, alors $f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

b) Si $f \in S$ et f impaire, alors $f(-x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right)}{2}$.

II/ Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1}$$

1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$.

2) Montrer que pour tout reel $x, -1 \leq g(x) \leq 1$.

3) g est-elle injective ? Justifier votre reponse.

4) g est-elle surjective ? justifier votre reponse.

5) Soit l'apllication h: $[1;\ +\infty[\longrightarrow]0; 1]$

$$x \longmapsto g(x).$$

Montrer que h est bijective et definir sa bijection reciproque.

EXERCICE 14 :

A/ on considere 02 fonctions f et g

1) Montrer que si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$.
2) On suppose que f est definie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a + b) - f(a) = f(b)$.
   a) Montrer que $f(0) = 0$
   b) Montrer que f est impaire
   c) Montrer que si f est periodique de periode T, alors $f(T) = 0$
3) On suppose maintenant que f et g ont meme parité. Etudier la parité de $f + g$ et $f \times g$.

B/ soit f une fonction definie sur $\mathbb{R}$ et verifiant la relation : $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$.

1) Determiner les fonctions constantes verifiant la relation precedente.
   Dans la suite, on suppose que f est non constante sur $\mathbb{R}$.
2) Determiner $f(0)$ et etudier la parité de f.
3) Le plan est muni d'un repere $(O; I; J)$. On suppose que $f(0) = 1$ et que f admet une racine α.
   a) Montrer que le point $A(\alpha; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.
   b) En déduire que 4α est une période de f.
   c) Montrer que $f(4\alpha) = 1$.

EXERCICE 15 :

1) On considère l'application f: $[2;\ +\infty[\longrightarrow [1;\ +\infty[$ définie par $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$.

a) Démontrer que f réalise une bijection de $[2;\ +\infty[$ vers $[1;\ +\infty[$.

b) En déduire l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f en fonction de x.

2) On considère les fonctions g et h définie respectivement par $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$ et $h(x) = \sqrt{3 - 2x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g$.

b) Déterminer l'expression de $h \circ g(x)$ en fonction de x.

3) Soit E un ensemble non vide. On considère trois applications m, n et q definie de E vers E. On suppose que $m \circ n = m \circ q$.

Démontrer que $n = q$ si et seulement si m est une application injective.

EXERCICE 16 :

Soient g, h et t les fonctions définies par : $t(x) = \frac{x^2+6|x|-4}{|x|-9} - \sqrt{|x|}$; $h(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$; . On désigne par (C_g) et (C_h) les courbes représentatives respectives des fonctions g et h dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O; I; J)$.

1. a) Montrer que le point $A\binom{-1}{-2}$ est centre de symétrie à la courbe (C_g).

b) Démontrer que $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est bijective et définir sa bijection réciproque.

2) a) Déterminer deux réels a et b tels que $g(x) = h(x - a) + b$.

b) Montrer alors que C_g est l'image de C_h par une transformation à déterminer.

3) Construire C_h,et C_g dans le même repère

4) a) Déterminer l'ensemble de définition de t.

b) Étudier la parité de t et déduire l'élément de symétrie à la courbe de t.

5) Déterminer l'ensemble de définition de goh et determiner l'expression de $goh(x)$.

EXERCICE 17 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$ et les fonctions g et h définies par : $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ et $h(x) = \frac{5}{x}$. On désigne par (C_f), (C_g) et (C_h) les courbes respectives des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

2) Par quelle transformation obtient-on la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} par (C_f) ?

3) a) Vérifier que $g(x) = h(x - 2) + 1$.

b) En déduire que (C_g) est l'image de (C_h) par une transformation du plan que l'on précisera

4) Montrer que le point $\Omega(2,1)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_g) de g.

5) a) On pose $t(x) = f \ o\ h(x)$. Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Exprimer $t(x)$ en fonction de x.

6) On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = x + \sqrt{|x^2 - 4|}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Écrire les restrictions de φ respectivement sur les intervalles $]-\infty; -2]$; $[-2; 2]$.

EXERCICE 18

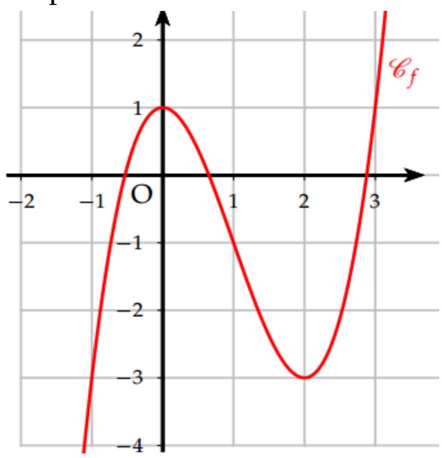
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et par représentée ci-dessous.

Déduire les courbes des fonctions g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = |f(x)|$

c) $k(x) = f(-x)$



ACTIVITÉS D'INTEGRATIONS.

Activité 1 :

Situation :

Monsieur ABENA est directeur d'un magasin de fabrication et de vente des jouets en bois. La machine permettant de découper le bois utilise 4 batteries et la charge d'une batterie dépend de la tension U en volts qui est appliquée et qui est une fonction du temps t en seconde définie par $U(t) = 12\sin t$. La charge des batteries n'a lieu que si la tension totale est supérieure à 24 volts. Par ailleurs, ce magasin compte 9 employés dont n filles. Le directeur voudrait former un bureau constitué d'un chef et son adjoint pour gérer ses employés ce bureau aura exactement une fille et le nombre possible de bureau est de 40. DEMAKA, employé de ce magasin, est un éleveur et il souhaite protéger son bétail avec trois rangés de fils barbelés dont le mètre est vendu à 1950 FCFA. Son enclos est donné par l'ensemble des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\| = 100$. Pour cela, M. DEMAKA a prévu une somme de 650 000FCFA.

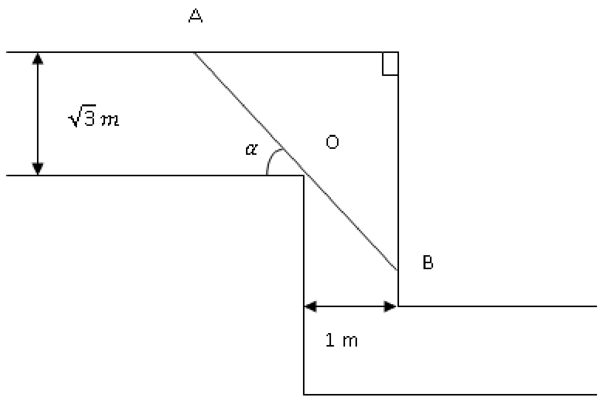
Tâches :

1) Déterminer l'intervalle de temps contenu dans $[0\,;2\pi]$ dans lequel la charge s'effectue.
2) Déterminer le nombre d'employés filles dans ce magasin.
3) La somme que possède DEMAKA est-elle suffisante pour protéger son bétail ?

Activité 2 :

Situation :

A l'occasion de la cérémonie de remise des bulletins de fin du premier trimestre, le conseil d'établissement d'un lycée décide de rénover la salle de réception des visiteurs. La figure ci-contre représente le plan de réalisation du nouveau couloir permettant d'accéder à la salle de réception de ce lycée. Ce couloir a deux largeurs : la première qui mesure $\sqrt{3}\ m$ et la deuxième au niveau de la déviation à l'angle droit qui mesure $1\ m$. Sur cette figure une droite qui passe par O fait avec l'un des murs de la salle un angle α et coupe les deux autres murs en A et en B ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $AB = 4\ m$). KAM et LATSAP, deux élèves de première C de ce lycée observent ce plan et décident de déterminer les valeurs possibles de α. KAM affirme que α peut prendre deux valeurs, $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$; LATSAP quant à lui dit que α ne peut prendre qu'une seule valeur qui est $\frac{\pi}{3}$.



Le proviseur souhaite particulièrement que la zone centrale du plafond de la salle de réception soit décorée avec un bois rouge qui coûte 5 000 FCFA le mètre carré. Cette zone est représentée dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 16$ où $C(1;\ -3)$ et $D(1;3)$.

Pour la cérémonie de remise des bulletins, on a invité 12 scientifiques, constitués de 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes. Au moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, qu'il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Tâches :

1) Qui de KAM et LATSAP a raison concernant l'angle α ? justifier clairement votre réponse.
2) Quel montant faut-il prévoir pour la décoration de la zone centrale du plafond de la salle de réception ?
3) Déterminer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

Activité 3 :

Le conseil d'établissement du lycée bilingue de Mendong voudrait aménager son site à l'extérieur du lycée en y construisant un stade de volley –Ball, un stade de hand-ball et une piste d'athlétisme. Dans le cahier de charge, le stade de hand-ball est délimité par les points images sur le cercle trigonométrique des solutions sur [0 ;2 π] de l'équation $I(x) = 1$ ou $I(x) = 1 + 2\sin x \cdot \cos x - 2cos^2 x$ l'unité étant 12 mètres. Pour éviter que la pelouse soit submergée de boue, le conseil a décidé de daller à l'aide du sable et du ciment : le sable est vendu à 600frs le seau de 15 litres et un seau peut couvrir un espace de 0,5m². Un sac de ciment ROBUST coutant 5700Frs le sac et un sac de ciment peut couvrir 3m² de surface.

Le stade de volley-ball est délimité par trois bornes dans le plan muni du repère orthonormé $(o; i; j)$ par les points E (20,-50), F(75,25) et G(15,0), le conseil décide de recouvrir cette surface du gazon synthétique, n mètre carrés de gazon synthétique coûte environ 350 000Frs n étant le coefficient de x^4 dans le développement de $(x + 2)^6$.

S'agissant de la piste d'athlétisme, elle est délimitée dans un plan autour d'une portion ayant la forme d'un triangle équilatérale ABC de côté 10m et représenter par l'ensemble des points M tel que

$$15 \leq \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|.$$

Le conseil désire planter des panneaux publicitaires le long des abords de la piste. Deux pieds de panneaux publicitaires permettant de recouvrir 0,15 m et un pied coûtant 750 frs.

1- Déterminer le budget à prévoir par ce conseil pour la construction du stade de hall-Ball
2- Déterminer le budget à prévoir par ce conseil pour la construction du stade volley-ball
3- Déterminer le budget à prévoir par ce conseil pour planter les panneaux publicitaires