Kams Tiko Hamida PC1

COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025 Classe : PC
Département de MATHEMATIQUES	FICHE DE TRAVAUX DIRIGE : BARYCENTRES	

EXERCICE 1 :

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les points : $A(-2;1), B(2;3), C(5;\ -3)$ et $G_m = bar\{(A;3m-1),(B;-m+5),(C;-2m-2)\}$.
   a) Calculer les coordonnées de G_0.
   b) Montrer que pour toute valeur de m, G_m existe.
   c) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle G_m est isobarycentre des points A, B et C ?
   d) Montrer que pour tout m, G_m décrit une droite qua l'on déterminera l'équation cartésienne.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On donne les points A, B et C dont les coordonnées sont suivantes : $A(\cos\theta\,;\sin\theta)$, $B\left(\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right);\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, et $C\left(\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right);\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ le point $G = bary\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$.
   a) Justifier que G a pour coordonnées $G(-\cos\theta\,;\ -\sin\theta)$.
   b) Vérifier que $2GB^2+2GC^2-GA^2=0$.
   c) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $2MB^2+2MC^2-MA^2=3$

EXERCICE 2 : DROITE D'EULER.

Soient ABC un triangle non rectangle et A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle.

1. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
   a) Montrer que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$.
   b) En déduire $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$.
   c) Montrer que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC).
   d) Pourquoi la droite (BH) est-elle perpendiculaire à (AC) ? En déduire la nature du point H pour le triangle ABC.
2. On note G le centre de gravité du triangle ABC.
   a) Montrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$
   b) Dans quel cas $O=G=H$?
   c) Le cas précédent excepté, montré que les points O, G et H sont alignés sur une droite, que l'on appelle la droite d'Euler du triangle.
   d) Montrer que le résultat précédent reste valable si le triangle est rectangle.

EXERCICE 3 :

Soit ABC un triangle quelconque, G le milieu de $[AB]$, E et F deux points définis par : $\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$,

$3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ et $H=bar\{(B,3);\ (C,-1)\}$, on donne $BC=4cm$

1. Exprimer E et F comme barycentre des systèmes de points pondérés à préciser.
2. Montrer que les (AE) ; (BF) et (CG) passent par un point commun qu'on précisera.
3. Montrer que H, F et G sont alignés.
4. Déterminer et construire les ensembles (E) et (F) des points M tels que :

(E): $3MB^2+MC^2=112$ et (F): $21\le\|3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|\le 28$.

EXERCICE 4 :

ADB est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB=4cm$. O est le milieu du segment $[BD]$ et C est le barycentre des points A, B et D affectés respectivement des coefficient $-1, 1$ et 1. Dans un repère orthonormé on a : $A(-2,2)$; $B(1,2)$, $D(-2,5)$.

1. Faire une figure, déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MB^2+MD^2=32$.
3. Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

4. Montrer que (Γ) coupe l'axe des ordonnées en deux points P et Q dont on précisera les ordonnées (P étant le point dont l'ordonnée est la plus grande).
5. Soit m un réel et coefficient directeur de la droite (T) passant par B, et tangent à (Γ).
   a) Le point B est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de (Γ) ?
   b) Montrer que l'équation linéaire de (T) est $y = mx + 2 - m$.
   c) Calculer la distance de C à la droite (T) puis déduire les équations cartésiennes des deux tangentes à (Γ) passant par B..

EXERCICE 5 :

[AB] est un segment de longueur 3 cm et G le barycentre du système $\{(A\,;2),(B\,;-1)\}$.

1. Démontrer que A est le milieu du segment [GB], puis placer G.
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$.
   a) Montrer qu'un point M du plan appartient à (Γ) si et seulement si $2MA^2 - MB^2 = 0$.
   b) Déterminer et construire (Γ).
3. Soit (T) l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$, où $C \in (\Gamma)$.
   a) Montrer que C appartient aussi à (T).
   b) Montrer que (T) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CG} = 0$.
   c) Déterminer et construire (T).

EXERCICE 6 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4cm$ et $AC = 3cm$. Soit G le barycentre du système $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$.

1. Déterminer et construire le point G.
2. Montrer que $AG = 10$; $BG = \sqrt{52}$ et $CG = \sqrt{145}$.
3. Soit (F) l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = -72$ et (D) l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = -80$
   a) Montrer que $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + GA^2 + 2GB^2 - GC^2$ et $MA^2 - MB^2 = -2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (F) et (D).
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on donne $A(-4;3), B(0,3)$ et $C(-4,6)$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (F) et (D).
   b) En déduire les positions relatives de (F) et (D).

EXERCICE 7:

ABCD est un rectangle de centre O, tels que la longueur $AB = 8$ et la largeur $BC = 6$. Soit $(\mathcal{R})$ le lieu des points M du plan (ABC) tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \|-24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD}\|$.

1. Construire le rectangle ABCD et place le point O.
2. Démontrer que $-24\overrightarrow{MA} + 12\overrightarrow{MB} + 12\overrightarrow{MD} = 12\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4OM^2 + AC^2$.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de $(\mathcal{R})$.

EXERCICE 8:

$ABCD$ est un rectangle tel que $BC = 6cm$ et $BA = 8\ cm$. Les points I, J et K sont tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; $I = bar\{(A;\,-1),(C,4)\}$ et $K = bar\{(A;\,-1),(B,2),(C,4)(D,1)\}$.

1. Écrire le point J comme barycentre des points B et D affectés des coefficients que l'on précisera.
2. En déduire que K est le milieu du segment [IJ].
3. Montrer que $JB^2 = \frac{100}{9}$.
4. Montrer que : $2BM^2 + DM^2 = 3JM^2 + \frac{200}{3}$ pour tout point M du plan.
5. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan tels que $2BM^2 + DM^2 = 100$.
6. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\|4\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\| = \|2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\|$

EXERCICE 9:

On considère le triangle ABD rectangle isocèle en A et le point C un point du plan tel que

c) Montrer que $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + GA^2 + 2GB^2 - GC^2$.
d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (F).
e) Construire (F).

8. Déterminer et construire l'ensemble des points N tels que $6 \leq \|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\| \leq 10$.
9. Déterminer et construire l'ensemble des points P et Q tels que : $mes\ \widehat{APB} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $mes\ \widehat{AQB} = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

B- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ et (D) la droite d'équation cartésienne $x - y - 2 = 0$.
a) Déterminer la nature et les caractéristiques de $(\mathcal{C})$.
b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).
c) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$.

EXERCICE 13:

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\quad Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\quad Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$
$Mes\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

EXERCICE 14 :

1. Démontrer que pour tout réel x, on a : $cos^6x + sin^6x = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x)$.
2. Résoudre l'équation $cos^6x + sin^6x = \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}\sin 4x + \frac{8}{3}\right)$.
3. Représenter les images solutions sur le cercle trigonométrique.

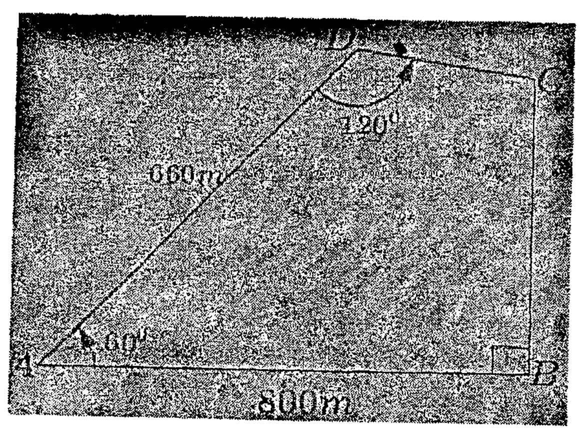
EXERCICE 15 :

Une urne contient six boules portant le numéro 1, quatre boules portant le numéro $\sqrt{3}$, cinq boules portant le numéro -1 et cinq boules portant $-\sqrt{3}$ indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On désigne par a le nombre porté par la première boule et b, celui porté par la deuxième boule. On considère deux points et distincts A et B d'un plan et l'équation (E): $a\cos x + b\sin x = 0$.

1. Déterminer le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que $-\frac{\pi}{4}$ soit solution de (E).
2. Déterminer le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ soit constant pour tout point M du plan.
3. Déterminer le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que l'ensemble des points M tels que $aMA^2 + bMB^2 = 72$ soit un cercle. On donne $AB = 6\ cm$
4. Déterminer le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$ ne soit pas l'ensemble vide.
5. Déterminer le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = ab$ ne soit pas l'ensemble vide.

EXERCICE 16 :

Le champ de Mr MBIDA à la forme de la figure suivante. Il voudrait clôturer ce champ à l'aide des grillages. Son technicien lui propose des grillages dont le mètre coûte 1500 FCFA. Dans ce même champ il voudrait utiliser les trois quarts de la surface pour implanter sa ferme.



1. Aider Mr MBIDA à déterminer le nombre de mètre de fil de grillage à acheter.
2. Aider Mr MBIDA à déterminer la surface à utiliser pour implanter sa ferme.

$C = bar\{(A,-1);(B,1);(D,1)\}$. On considère les ensembles des points
$(\mathcal{P}_1): -MA^2 + MD^2 + MC^2 = OA^2$ $(\mathcal{P}_2): MB^2 + MD^2 = \frac{159}{2}$ $(\mathcal{P}_3): MA^2 - MB^2 = k$.

1. Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré de centre O.
2. Montrer que :

a) $-MA^2 + MD^2 + MB^2 = OA^2 \Leftrightarrow MC^2 - CA^2 + CB^2 + CD^2 = OA^2$.

b) $MB^2 + MD^2 = \frac{159}{2} \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{BD^2}{2} = \frac{159}{2}$.

c) $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = k$ avec k un nombre réel.

3. En déduire la nature et les éléments caractéristique de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
4. Déduire en fonction de la valeur du réel k, la nature de $(\mathcal{P}_3)$.
5. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on donne $A(-5,5)$; $B(2,7)$; $D(-7,12)$.

a) Déterminer les coordonnées de O, I et C.

b) On suppose que $M(x;y)$. Déterminer en fonction de x et y l'équation cartésienne des ensembles $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

c) Pour quelle valeur de k, $(\mathcal{P}_3)$ est -elle tangente à $(\mathcal{P}_1)$. Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente.

EXERCICE 10 :

ABC est un triangle rectangle en A. Soit I milieu de $[BC]$ et G barycentre des points pondérés $(A;3),(B;-1),(C;-1)$. On pose $AB = AC = 2\ cm$.

1. Construire les points A, B, C, I et G.
2. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
3. Calculer GA^2 ; GB^2 et GC^2.
4. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $3MA^2 - MB^2 - MC^2 = 11$.
5. Représenter (E).
6. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne $A(1;2), B(1;-2), C(-3;2)$ et $(\Delta): y = x + 1$

a) Déterminer l'équation cartésienne, puis paramétrique de (E).

b) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et (Δ).

EXERCICE 11 :

ADB est un triangle rectangle isocèle en A, I est le milieu du segment $[BD]$ et C le barycentre des points A, B et D affectés respectivement des coefficient $-1, 1$ et 1. Dans un repère orthonormé on a : $A(-2,2)$; $B(3,2)$, $D(-2,7)$.

1. Faire une figure et déduire la nature du quadrilatère $ABCD$ est un carré.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MB^2 + MD^2 = 50$.
3. Montrer que pour tout point $M(x;y)$ de (Γ) on a : $x^2 + y^2 - x - 9y + 8 = 0$.
4. Montrer que (Γ) coupe l'axe des ordonnées en deux points P et Q dont on précisera les ordonnées (P étant le point dont l'ordonnée est la plus grande).
5. Soit m un réel le coefficient directeur de la droite (D_m) passant par $F(-7;2)$.

a) Résoudre dans R l'équation suivante : $7m^2 - 6m - 1 = 0$.

b) Montrer que l'équation linéaire de (D_m) est $y = mx + 2 + 7m$.

6. Calculer la distance de I à la droite (D_m) puis déduire les équations cartésiennes des deux tangentes à (Γ) passant par F.
7. Soient D et J les points d'intersections de (Γ) avec ces deux tangentes, déterminer l'équation normale de la bissectrice de l'angle $\widehat{DFJ}$.

EXERCICE 12 :

A- ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3\ cm$ et $AC = 4cm$. Soit G le barycentre du système $\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$.

5. Déterminer et construire le point G.
6. Montrer que $AG = \sqrt{13}$; $BG = \frac{5}{2}$ et $CG = 3\sqrt{5}$.
7. Soit (F) l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = \frac{238}{4}$.