

INTERROGATION DE MATHÉMATIQUESClasse : PC1Date : 14/01/2025Durée : 1h30Exercice 1 (5 points)

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

1°) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (2pts)

2°) Montrer que g est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$. (1pt)

3°) Donner une interprétation graphique des limites de f en $+\infty$ et en -1 . (1pt)

4°) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1 + \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = 0$. (1pt)

Exercice 2 (4 points)

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{|x+1| - 2}$

1°) Trouver l'ensemble de définition de h . (0,5pt)

2°) Exprimer $h(x)$ sans barres de valeur absolue (0,5pt)

3°) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et donner une interprétation graphique du résultat. (1pt)

4°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et donner l'équation de l'asymptote à $(\mathbb{R})$. (1pt)

5°) Justifier le nombre d'asymptotes à $(\mathbb{R})$ (1pt)

Exercice 3 (04 points)

$$t:]0; +\infty[\rightarrow]-\infty; 2[\quad ; \quad j:]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$
$$x \mapsto t(x) = \frac{2x-1}{x} \quad ; \quad x \mapsto j(x) = x^2 - 2x$$

1°) Montrer que t est une application bijective et définir sa réciproque t^{-1} . (1,5pt)

2°) Montrer que j est une application bijective et définir l telle que $j \circ l = \text{Id}$. (1,5pt).

3°) Soit $h(x) = \frac{-2x+5}{-x+1}$, Montrer que $A(1;2)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_h)$. (1pt)

Exercice 4 (07 points)

On considère la fonction f définie par la courbe ci-dessous (voir figure).

1°) Dresser le tableau de variations de f . (1pt)

2°) Dresser le tableau de variations de g avec $g(x) = f(|x|)$. (1,5pt)

3°) Dresser le tableau de variation de h avec $h(x) = |f(x)|$. (1,5pt)

4°) Reproduire la figure, puis construire la courbe de g (en pointillés) avec $g(x) = -f(-x)$. (3pts)

