COLLÈGE François-Xavier VOGT
B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28
e-mail : collegevogt@yahoo.fr

Année scolaire 2024-2025

Classe : PC

MINI SESSION FEVRIER 2025

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2H45

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (13,00 POINTS)

EXERCICE 1 : (04,00 POINTS)

A- Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(4;3)$ et $B(7;7)$, soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ et (T) l'ensemble des points M tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$ où $C \in (\Gamma)$. Le point G est le barycentre du système $\{(A\,;2),(B\,;-1)\}$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 = 0$. **1pt**
2. Montrer que (T) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CG} = 0$. **1pt**
3. Déterminer l'équation cartésienne de (T), ainsi que celle de (Γ). **0,5pt**

B- Soient x et y deux nombres réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-tan^2 x}$ et $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$. **1pt**
2. En déduire la solution dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = \sqrt{2} - 1$. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (04,00 POINTS)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on considère la fonction numérique suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x-3}{-x+2}, \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-3}{x^2-1}$$

1. Etudier la continuité de f au point d'abscisse $A(1;\ -1)$ **0,5pt**
2. Montrer que f n'est pas dérivable au point A. **0,5pt**
3. Déterminer l'équation de chaque demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point anguleux A. **0,5pt**
4. Dresser le tableau de variation de f. **1pt**
5. Montrer que h admet un prolongement par continuité en 1, puis définir le prolongement par continuité de h en 1. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (05,00 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction g définie pour tout réel différent de $\frac{3}{2}$, par $g(x) = \frac{4x^2-8x+4}{-2x+3}$. Soit D le domaine de définition de g.

1. Déterminer les limites aux bornes de D, puis en déduire l'équation d'une asymptote à $(\mathcal{C}_g)$. **1pt**
2. Justifier que pour tout x, de D $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{-2x+3}$. **0,25pt**
3. On considère la droite (d): $y = -2x + 1$.
   a) Justifier que (d) est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_g)$. **0,25pt**
   b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_g)$ et (d). **0,5pt**

c) Montrer que le point $K\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_g)$. **0,5pt**

4. On suppose que g est continue et dérivable sur D, et admet une fonction dérivée notée g'.

   a) Montrer que pour tout réel x de D, $g'(x) = \frac{-8x^2+24x-16}{(-2x+3)^2}$. **0,5pt**

   b) En déduire les variations de g sur D, puis dresser le tableau de variation de g. **1pt**

5. Déterminer les différents points d'intersections de $(\mathcal{C}_g)$ avec les axes du repère. **0,5pt**

6. Donner la représentation graphique de $(\mathcal{C}_g)$ pour les réels x de $[-4; 4]$. **0,5pt**

PARTIE II : EVALUATION DES COMPETENCES (07,00 POINTS)

SITUATION :

Dans une localité du pays, quatre villages P, Q, R et S sont tels que leurs différentes chefferies forment un carré de côté 2 kilomètres. On souhaite construire des chemins entre ces villages en choisissant, pour raison de coût, le projet pour lequel la longueur totale des chemins est la plus courte.

Dans la chefferie S, le monarque voudrait léguer à son fils aîné OBAMA une parcelle issue de la partition d'un de ces terrains rectangles de bornes A; B; C; D et de périmètre 24. Il souhaite que cette surface soit le plus grand possible par rapport aux bornes B et C de la surface rectangulaire.

L'homme d'affaire AMADOU de la chefferie a reçu de son monarque, une parcelle carrée, dont les bornes sont modélisées par les points I ; J ; K ; L et de côté 4. Il souhaite bâtir son range sur la surface définie par les bornes I ; J ; O ; L et M comme l'indique la figure 2 ci-dessous.

1. A quelle distance de P peut-on placer la borne T pour que la longueur totale des chemins soit la plus courte ? **2,25pts**
2. Pour quelle distance de A à B l'aire de AFD est-elle maximale ? **2,25pts**
3. A quelle distance de L peut-on placer M pour que l'aire de la partie hachurer de la figure 2 soit minimale ? **2,25pts**

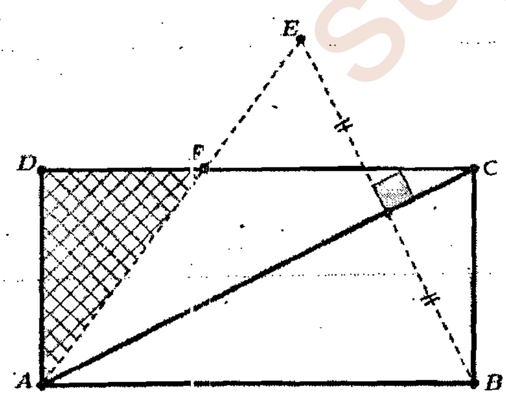

Figure 1

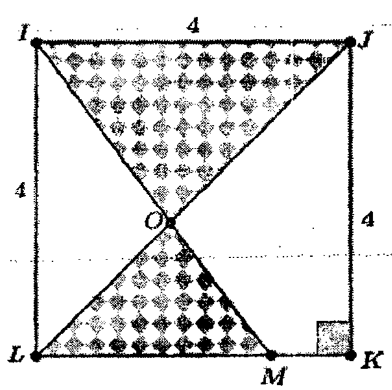

Figure 2

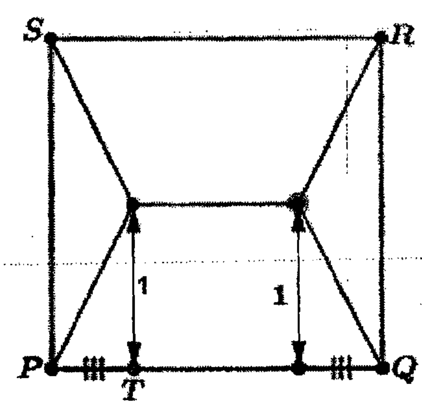

Figure 3

Présentation : 0,25pt