COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
		Du 06-01-2025

EVALUATION FORMATIVE 3	Classe : *PC**
EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Durée : 3H

EXERCICE 1 : (05,00 POINTS) 2,5/

1. Soient f et g deux fonctions numériques, a, b, c et d quatre nombres réels.

$$\begin{cases} f(x) = a^2x + 3, \quad x < 1 \\ f(x) = \frac{-b^2x-8}{-2x+1}; \quad 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{b^2}{5}x - ab; \; x > 3 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} g(x) = \frac{x^3-7x^2+17x+c}{x-2}; \; x < 2 \\ g(x) = x^2 + d, \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f et D_g de la fonction g. **0,5pt**

   b) Déterminer a et b pour que f soit continue sur D_f. **0,75pt**

   c) Déterminer c et d pour que g soit continue en $x_0 = 2$. **0,75pt**

2. Montrer que la fonction $h(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$, est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$ et déterminer son prolongement. **0,75pt**

3. Soit x un nombre réel non nul. Montrer que $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1-\cos x}{x^2}$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$.

4. Montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x+\cos x}{3+2\sin x}\right)$. **0,75pt**

5. Calculer les limites suivantes : $u = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}\right)$; $v = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-1} + 2x\right)$,
$w = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x + \cos x}{-\sin(3x)+\cos(3x)}\right)$ $z = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\tan 3x}{\tan 2x}\right)$ et $i = \lim\limits_{x \to 2}\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$. **1,25pt**

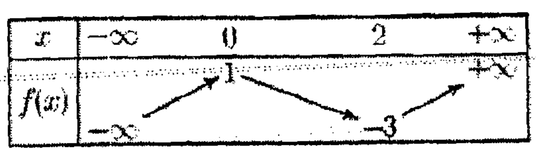
EXERCICE 2 : (05,00 POINTS) 4/5

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère trois fonctions numérique f, g et h :
$f(x) = \frac{2x+11}{x+5}$, g est définie de $[-3; +\infty[$ vers $[-1; +\infty[$ telle que $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$
et $h(x) = x^2 - 6x + 8$.

1. Déterminer le domaine de définition de fog et gof. **1pt** -0,5
2. Montrer que g est bijective et définir sa bijection réciproque g^{-1}. **0,75pt**
3. Monter que pour tout réel x, $h(x) = (x-3)^2 - 1$ et pour tout réel x différent de -5, $f(x) = 2 + \frac{1}{x+5}$. **0,5pt**
4. Donner le programme de construction de chacune des courbe $(\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$. **0,75pt**
5. Construire les courbes $(\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_g), (\mathcal{C}_{g^{-1}})$ et $(\mathcal{C}_h)$ chacune dans son repère. **2pts**

EXERCICE 3 :(05,00 POINTS) 3,25/5

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction numérique d'une variable réelle x.



1. Dresser le tableau de variation des cinq fonctions définies par : $g(x) = 2f(x); h(x) = f(-x); j(x) = f(x+2) - 3, i(x) = |f(x)|$ et $k(x) = f(|x|)$. **1,25pt** -0,75

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ avec $\alpha < \beta < \gamma$. **0,75pt**
3. En déduire le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**
4. On suppose que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, et $\beta \in [0; 2]$. Donner un encadrement de β d'amplitude 0,01 près. **0,5pt**
5. Justifier pourquoi l'équation $f(x) + 1 = 0$, admet trois solutions dans $\mathbb{R}$. **0,5pt**
6. Sur la courbe ci-dessous qui est celle de la restriction de f, représenter en rouge la courbe de h, en bleue la courbe de i et en crayon la courbe de k. **1,5pt**

EXERCICE 4 :

A- On considère les fonctions numériques définie sur $D =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par
$j(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ et $k(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$, $k(x) = 2\frac{\sin(j(x))}{j(x)}$. **0,5pt**
2. Déterminer la valeur exacte des limites $a = \lim\limits_{x\to+\infty} j(x)$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$. **0,5pt**

B- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère la fonction $f(x) = \frac{x^2-7x-13}{-x+4}$.

1. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. **1pt**
2. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe (C_f). **0,25pt**
3. Déterminer a, b et c tels que pour tout réel x, différent de 4, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}$. **0,5pt**
4. Montrer la droite $(D): y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe (C_f). **0,25pt**
5. Etudier la position relative de (C_f) et (D). **0,5pt**
6. Soit M un point du plan, tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{O\Omega} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$.
   a) Exprimer X et Y en fonction x et y. **0,5pt**
   b) Déterminer une fonction g telle que $Y = g(X)$. **0,5pt**
   c) Etudier la parité de g puis déduire. **0,5pt**