COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	MINI SESSION	Situation Scolaire N°4 Du 27au 29 Janvier 2025

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **03 heures 45 minutes** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 POINTS

Exercice 1: 05 Points

A- a et b sont deux entiers naturels. On pose $pgcd(a,b) = d$ et $pgcd(a+b, ab) = 49$.

1- a) Déterminer les valeurs possibles de d. *0,5pt*

b) Montrer que 49 divise d^2. *0,5pt*

2- On pose $ppcm(a,b) = 231$.

a) Montrer que $d = 7$. *0,5pt*

b) Quelles sont alors les valeurs de a et b ? *0,75pt*

B- Soit (u_n) la suite dont le premier terme est u_0 et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1- Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0,5pt*

2- On suppose que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite. *0,5pt*

3- Démontrer que si $u_0 + u_0^2 > 0$, alors la suite (u_n) est divergente. *0,5pt*

4- On suppose que $u_0 + u_0^2 < 0$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $-1 \leq u_n \leq 0$. *0,75pt*

b) Justifier alors que la suite (u_n) est convergente. *0,5pt*

Exercice 2 : 05 Points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(-1;2;1)$, $B(1;-6;-1)$,

$C(2;2;2), D(0;1;-1)$ *et* $E(-2;0;0)$.

1- Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC). *0,5pt*

2- a) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. *0,5pt*

b) En déduire la distance du point D au plan (ABC). *0,5pt*

3- Soit les plans (P) *et* (Q) d'équations respectives $x + y - 3z + 2 = 0$ et $y = 0$.

a) Montrer que les plans (P) *et* (Q) sont sécants suivant une droite (Δ) dont on précisera un vecteur directeur $\vec{u}$. *0,5pt*

Soit $M(x,y,z)$ un point de (Δ). On pose $\overrightarrow{EM} = t\vec{u}$ où t est un paramètre réel.

b) Exprimer les coordonnées de M en fonction de t. *0,5pt*

c) Exprimer DM^2 en fonction de t. *0,5pt*

d) Démontrer qu'il existe un unique point M dont on précisera les coordonnées où la distance DM est minimale. On désignera par D' ce point. *0,5pt*

e) Calculer la distance DD'de deux manières. *0,75pt*

4- On considère la sphère(S)d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 2 = 0$. Montrer que l'intersection de (S) et de (P) est un cercle dont précisera le centre et le rayon. *0,75pt*

Exercice 3 : 05 Points

A- On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1- Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 2. 0,5pt

2- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 0,75pt

3- Soit $M\binom{x}{y}$ le point de (C_f) avec $x \in [0;2]$. Montrer que sur $[0;2]$, (C_f) est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon. 0,5pt

B- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1- Montrer que $Kerf$ est une droite vectorielle dont on précisera une base. 0,75pt

2- Montrer que Imf est un plan vectoriel dont on précisera une base. 0,75pt

3- Montrer que $M^3 = 0$. 0,5pt

4- Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. 0,75pt

5- Justifier que la matrice $K = I - M$ est inversible et préciser son inverse. 0,75pt

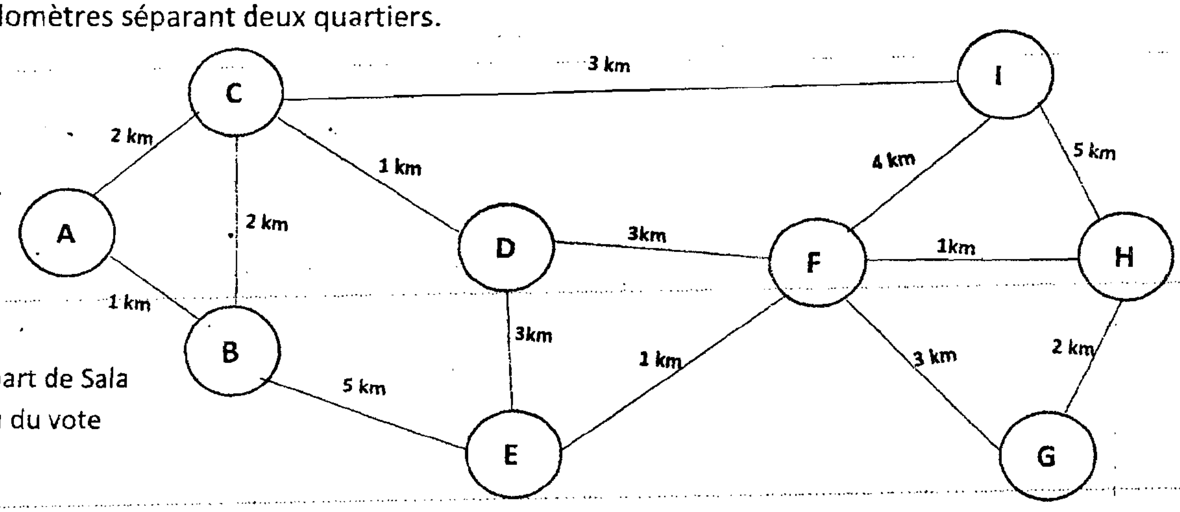
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Situation :

En février 2013, la population électorale de la localité de Kalda était de 20000 électeurs. Depuis cette période, chaque année cette population augmente de 5% et de plus 1000 nouveaux électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement. Owona voudrait avoir une idée sur le nombre d'électeurs en 2025 en supposant qu'il n'y a pas de décès.

Pour les élections Municipales en 2025, nous avons deux candidats : Alex et Bertrand. Le candidat Alex a formé une grande équipe dynamique afin de pouvoir remporter ces élections. Son équipe est répartie en 6 commissions : ***Communication – Stratégie – Finances – Relations Humaines – Sondages – Sportive***. Chacune des personnes du groupe fait partir de deux commissions exactement et deux commissions quelconques ont exactement une personne en commun.

Le jour des élections, le vieux Sala doit partir de chez lui (quartier A) pour son bureau de vote (quartier H). Il peut passer par plusieurs quartiers avant d'atteindre ce lieu. Son fils a déterminé le plus court chemin pour lui éviter trop de fatigue. Le graphe ci-dessous nous donne les différentes pistes possibles et les distances en kilomètres séparant deux quartiers.



A : Départ de Sala
H : Lieu du vote

Tâches :

1- Déterminer le nombre de membre du groupe d'Alex ainsi que le nombre de personne par commission. **1,5pt**

2- Aider Owono à retrouver le nombre de votants en 2025. **1,5pt**

3- Retrouver, à l'aide d'un algorithme que l'on nommera, le chemin emprunté par Sala pour aller voter. **1,5pt**