Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.

Exercice 1 **4,5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4i\sqrt{3}z-16=0$. **1 point**

2. On considère les points P et Q d'affixes respectives $p:=2+2i\sqrt{3}$ et $q:=-2+2i\sqrt{3}$.

2.a Écrire chacun des nombres complexes p et q sous forme trigonométrique. **1 point**

2.b Écrire le nombre $\dfrac{q}{p}$ sous forme exponentielle et en déduire la nature du triangle OPQ. **1 point**

3. On désigne par f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tels que : $Z':=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$.

3.a Déterminer l'affixe de R, l'image de P par f. **0,5 point**

3.b Montrer que f admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe(point M_0 d'affixe Z_0 tel que $Z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}Z_0$). **0,25 point**

4. Représenter les points P et R dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **0,75 point**

Exercice 2 **4 points**

On considère les intégrales I et J définies par : $I=\int_0^{\pi} xcos^2xdx$ et $J=\int_0^{\pi} xsin^2xdx$.

1. Déterminer la valeur exacte de $I+J$. **0,75 point**

2. a) Démontrer que $I-J=\int_0^{\pi} xcos(2x)dx$. **0,5 point**

b) On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x)=\tfrac{1}{2}xsin(2x)+\tfrac{1}{4}cos(2x)$$

Démontrer que f est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x\mapsto xcos(2x)$. **1 point**

c) En déduire la valeur exacte de $I-J$. **0,5 point**

3. A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J. **1 point**

PROBLÈME **11,5 points**

Le problème comporte deux parties A et B liées.

Partie A : **Étude d'une fonction auxiliaire** **3,5 points**

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=1-lnx+(1-x)e^x$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^>} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. **2 × 0.25 point = 0,5 point**

2. Démontrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $h'(x)=-\frac{x^2e^x+1}{x}$ **0.75 point**

3. Dresser le tableau des variations de la fonction h. **0,5 point**

4. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution. On notera α cette solution. **0,75 point**

5. Prouver que $1,23<\alpha<1,24$. **0,5 point**

6. En déduire le signe de la fonction h suivant les valeurs de x. **0,5 point**

Partie B Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative. **5 points**

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{-x}{lnx-e^x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ On désigne par (C_g) la représentation graphique de la fonction g dans le plan orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que g est continue à droite de 0. **0.5 point**
2. Étudier la dérivabilité de g à droite de 0. **0,5 point**
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. **0,5 point**
4. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x)$ est de même que $h(x)$. **0,5 point**
5. En déduire les variations de g sur dresser son tableau de variations. **1 point**
6. Montrer que pour tout $g(\alpha) = \frac{1}{e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}}$.
7. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x-\frac{1}{x}}$.
   - **7.a** Étudier les variations de f. **1 point**
   - **7.b** Sachant que $1,23 < \alpha < 1,24$, donner un encadrement de $g(\alpha)$;en déduire que $0,38$ est une valeur approchée de $g(\alpha)$ à $0,01$ prés. **0,75 point**
8. Déterminer les equations des droites (T) et (T'), tangentes à (C_g) aux points d'abscisses respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ **1 point**
9. Tracer (C_f), (T') et (T). **1,25 point**