

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : 15 points**

**Exercice 1 : 3,25 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ . On considère la suite  $(z_n)$  définie par  $z_0 = -2$  et  $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$ . On note  $M_n$  l'image du nombre complexe  $z_n$ .

- 1) Justifier que  $M_{n+1}$  est l'image de  $M_n$  par une transformation  $S$  que l'on caractérisera. **0,5pt**
- 2) Déterminer l'image de la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  par  $S$ . **0,5pt**
- 3) On pose  $v_n = |z_n|$  et  $u_n = \arg(z_n)$ .
  - a) Donner la nature de la suite  $(v_n)$  et déduire l'expression de  $|z_n|$  en fonction de  $n$ . **0,5pt**
  - b) Donner la nature de la suite  $(u_n)$  et en déduire l'expression de  $\arg(z_n)$  en fonction de  $n$ . **0,5pt**
  - c) Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $M_n$  appartient à la demi-droite  $[Ox)$ . **0,25pt**
- 4) a) Calculer  $\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}$  et en déduire la nature exacte du triangle  $OM_nM_{n+1}$ . **0,5pt**
- b) On pose  $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n$ . Calculer la limite de  $(L_n)$ . **0,5pt**

**Exercice 2 : 3,75 points**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,1[$  par  $f(x) = 1 - x^2 + \ln(1 - x)$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$ , puis construire son tableau des variations. **0,5pt**
- 2) Construire la courbe  $(C_f)$  représentative de  $f$  dans un repère orthogonal. **0,5pt**
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]$ . **0,5pt**
- 4) En utilisant une intégration par parties, calculer  $I(t) = \int_{\alpha}^t f(x)dx$ , puis montrer que la Limite de  $I(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $1^-$  est égale à  $P(\alpha)$  où  $P$  est un polynôme. **0,75pt**
- 5) a) Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]$  respectivement par  $g(x) = |f'(x)|$  et  $h(x) = |f''(x)|$ . Etudier les variations de  $g$  et  $h$  et dresser leurs tableaux de variations. **0,75pt**
- b) En déduire que : pour tous  $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}\right]$ ,  $\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \frac{e^2+2}{3}$ . **0,25pt**
- c) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et de la tangente  $T_0$  au point d'abscisse 0. **0,5pt**

**Exercice 3 : 3,5 points**

- 1) Soit  $a$  un nombre entier naturel.
  - a) Démontrer par contraposée que si  $a^2$  est pair, alors  $a$  est pair. **0,25pt**
  - b) En déduire que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. **0,5pt**
  - c) Montrer que si  $a$  est premier, alors  $\sqrt{a}$  est irrationnel. **0,5pt**
- 2) Démontrer par récurrence que pour tous réels  $a$  et  $b$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ . **1pt**
- 3) En déduire une écriture simple des nombres  $A = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$  et  $B = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$ . **0,5pt**

- 4) On lance  $n$  fois de suite ( $n \geq 2$ ), un dé parfaitement équilibré. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$ , pour que la probabilité  $p_n$  d'obtenir au moins une fois un numéro strictement inférieur à 5 soit supérieur à 0,96.

**0,75pt**

#### Exercice 4 : 4,5 points

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On note  $V$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{E}$ . On considère le plan  $(P)$  d'équation  $-x + 2y + z = 0$  et les droites:  $(D): \begin{cases} -x + y = -3 \\ x + z = 5 \end{cases}$  et  $(L): \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ . On désigne par  $S_{(D)}$  et  $S_{(L)}$  les demi-tours d'axes respectifs  $(D)$  et  $(L)$  et  $S_{(P)}$  la réflexion d'axe  $(P)$ .

1-a) Démontrer que les droites  $(D)$  et  $(L)$  sont perpendiculaires en un point que l'on précisera.

**0,75pt**

b) En déduire la nature et l'élément caractéristique de  $S_{(D)} \circ S_{(L)}$ .

**0,5pt**

2) Déterminer l'expression analytique de  $S_{(P)}$ .

**0,75pt**

3- a) Déterminer la position relative de  $(P)$  et de  $(L)$ .

**0,25pt**

b) En déduire la nature et l'élément caractéristique de  $S_{(P)} \circ S_{(L)}$ .

**0,5pt**

4) Dans le plan  $(Q)$  d'équation  $x = 0$ , on considère l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M(0; y; z)$  tels que  $y^2 + 4z^2 - 2y - 24z + 33 = 0$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\Gamma)$ .

**0,75pt**

5) Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $V$  défini par  $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ;  $f(\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  et  $f(\vec{i} - \vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j}$ .

a) Ecrire la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

**0,5pt**

b) Déterminer le noyau  $\text{Ker} f$  de l'endomorphisme  $f$ .

**0,5pt**

#### PARTIE B : Evaluation des compétences : 5 points

Walo originaire de la région de l'extrême nord a un jardin dont la forme est rectangulaire en saison sèche. En saison des pluies, une rivière traverse ce jardin en réduisant légèrement les dimensions sur une longueur. Un géomètre a représenté sur un plan muni d'un repère orthonormé dont 1cm représente 10 dam ce jardin. En saison des pluies, ce jardin est délimité par les deux axes du repère, la droite d'équation  $x = 20$  et la courbe d'équation  $y = 4 + \ln(x + 20)$  qui représente la trajectoire de la rivière.

Walo cultive des champignons dans une partie de son jardin. Une étude faite par un responsable de suivi a établi que la production d'une année à l'année suivante augmente de 5%. En 2022 Walo a produit 12 000 champignons.

Pour augmenter sa production, Walo a contacté un chercheur en agronomie spécialisé dans la culture du champignon. Ce dernier après des études en laboratoire, lui a conseillé d'utiliser un type de bactéries. Le taux d'accroissement de ces bactéries à chaque instant est proportionnel au nombre de bactéries à chaque instant et on a obtenu  $5 \times 10^8$  bactéries après 3h et  $10^{10}$  bactéries après 5h.

#### Tâches :

1) A partir de quelle année on comptera plus de 20 000 champignons ?

**1,5pt**

2) Déterminer l'aire de ce jardin en période des pluies.

**1,5pt**

3) Déterminer le nombre initial de bactéries dans ce laboratoire.

**1,5pt**

#### Présentation :

**0,5pt**