Délégation Régionale du Nord

Groupe de Répétition le Scorpion

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Examinateur : Mr . KAKA DAIROU. W.S

MINESEC

ANNÉE SCOLAIRE **2024-2025**

Sujet 2 . Classe : $T^{le}D \propto C$

Durée : 4H Coef : 6 ∝ 4

EXAMEN BLANC MAI 2025

PARTIE EVALUATIONS DES RESSOURCES 14,5pts

EXERCICE 1 (Uniquement Tle C-E

I- On considère l'équation (E_0): $z^2 - 2\cos\varphi\, z + 1 = 0$ ou $\varphi \in IR$ d'inconnu Z

1- *Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe l'équation* (E_0)

2- *Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation* (E_n): $z^{2n} - 2\cos\varphi\, z^n + 1 = 0$ *ou* $\varphi \in IR^*$

II- Soit $P_\varphi(z) = z^{2n} - 2\cos\varphi\, z^n + 1$

1- Montrer que : $P_\varphi(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)z + 1\right]$

2- a- Calculer $P_\varphi(1)$

b-Déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}}$

3- *on pose* $H_n(\varphi) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\varphi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ $\forall\varphi \in]0;\pi[$ *et* $\forall n \geq 2$

a- Montrer que $2^{n-1}H_n(\varphi) = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}$

4- On pose : $\forall\, n \in IN^*$ $K_n(\varphi) = 2^{n-1}H_n(\varphi)$

a- Calculer $\lim\limits_{\varphi\to 0}(K_n(\varphi))$; $W_n = \lim\limits_{\varphi\to 0}(H_n(\varphi))$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n)$ (*on rappel que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right) = 0$ *si* $a > 1$)

EXERCICE 2 (Uniquement Tle D-TI

Soit l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}$, $Z^n = -\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{2}i$, $n \in IN^*$.

1- Déterminer les solutions Z_k de (E).

2- On pose $n = 5$. Représenter dans le plan complexe **P** muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points *images de solutions* Z_k *de* (E).

3- *On pose* $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$.

a- *Soit* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; *exprime* ω *en fonction de* j.

b- *Prouver que* a *est une solution de l'équation :* $Z^5 = \left(\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right)$,

4- *Soit la transformation* **T de P dans P**, *qui au point* **M de P** *d'affixe* Z *associe le point* M' *de* P *d'affixe* Z' *tels que :* $Z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right)Z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a- *Ecrire la forme algébrique du nombre complexe* $b = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$

b- *Donner la nature de* T *et précise ses éléments caractéristiques.*

EXERCICE 3

I- On considère la suite (U_n)définie par son premier terme $U_0 = 1$et $U_1 = 2$ et pour la relation de récurrenc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n$ (1).

1- Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le pr terme et la raison.

2- Déterminer V_n en fonction de **n**. En déduire U_n en fonction de **n**

3- Déterminer la limite de un quand n tend vers $+\infty$.

II- On définit la suite (W_n) par ses premiers termes W_0 et W_1 avec : $(W_0; W_1) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \sqrt[5]{(W_{n+1} \times W_n)^2 W_n}$.

1- Montrer que la suite (Z_n) par $Z_n = \ell n(W_n)$ (*où* ℓn *désigne le logarithme népérien*) vérifier la relation **1**

2- En déduire la limite de la suite (Z_n), puis de la suite (W_n)quand n tend vers$+\infty$.

EXERCICE 4 4.5pts

Soit f et h deux fonctions définies sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln x)^2 - 2x$ et : $h(x) = -x + \ln x + 1$ Cf la courbe representative de f dans le repère orthonormé (unité : 5cm).

1- Etudier le sens de variation de h; puis Déduisez-en, pour tout x de I, le signe de $h(x)$.

2- Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduisez-vous pour la courbe Cf?

3- Montrer que, pour tout x de I, on peut écrire : $f(x) = x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right]$

4- Déduire l'étude des branches infinie a la Coubes de f.

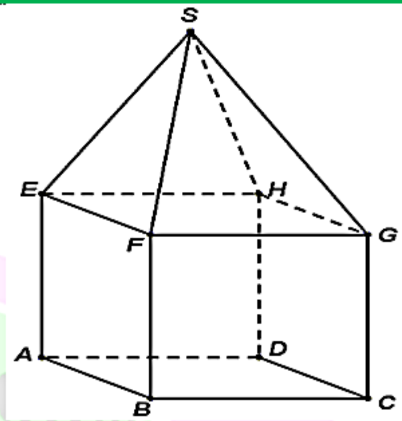
5- Démontrer que la fonction dérivée $f'(x)$ de f est : $f'(x) = \frac{2h(x)}{x}$

. Dressez le tableau de variation de f et tracer Cf ainsi que ses asymptotes éventuels. 1,5pt

1- PARTIE B. ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES : (10pts)

Le bâtiment municipal est composé d'un cube surmonté d'une pyramide. La salle dispose de trois lampes au plafond dont les positions sont représentées sur un même cercle (Γ) , un rideau de séparation disposé perpendiculairement au plan du sol et supporté par une ficelle ; et des décorations fixées selon une équation spécifique. Les climatiseurs nécessaires sont déterminés par le volume du bâtiment. La zone d'exposition requiert un tapis vert, dont le coût est connu. Les documents mentionnent techniques

Les informations ci-dessous :



Situation :

- ✓ L'espace st munie u repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$: le sommet S du toit a pour coordonnées $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$; la ficelle supportant le rideau est assimilable a une portion de droite (Δ) système d'équation cartésienne $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = -\frac{y}{4}. \\ z = 1 \end{cases}$
- ✓ Des objets de décoration sont fixé en des point e l'ensemble (Σ) des point M de l'espace tels que :
$$\left(2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}\right) = \vec{0}$$
- ✓ Les bâtiments de la commune utilisent des climatiseurs de **400KWh ou 600KWh,** selon que leurs volumes soient inferieurs $500m^3$ ou non.
- ✓ L'administration communale a décrit la zone d'exposition qu'elle voudrait aménager en la couvrant de tapis vert coutant **5000F** le mètre carré.

L'élève IMRANE doit caractériser ces éléments géométriques, choisir le bon climatiseur et estimer le coût du tapis.
Le plan u plafond est munie du repère orthonormé direct les points représentant les positions des lampes plafonnières sont les images des solutions de l'équation $(E) : Z^3 + (1 - i\sqrt{3})Z^2 + 2(1 - i\sqrt{3})Z^2 - 4 - 4i\sqrt{3}$
On admet que l'un de ces point donc l'affixe est $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$ est solution de E.

Tâches :

1- Déterminer la nature et un repère de (Σ)

2- Déterminer le centre et le rayon de (Γ)décrit par les lampes (On déterminera d'abord la nature du triangle former par les points représentant les positions des lampes plafonnières).

3- Déterminer le type de climatiseur adapté au bâtiment.

NB : On utilisera le repère $(A ; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

CORRECTION

PARTIE A EVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE 2 *5 points*

I- **On considère l'équation (E_0): $Z^2 - 2Cos(\varphi)Z + 1 = 0$ ou $\varphi \in IR$ d'inconnu Z**

1- Résolvons dans l'ensemble des nombre complexe l'équation (E_0)/

$$\Delta = (-2Cos\,\varphi)^2 - 4(1)(1) = 4Cos^2\varphi - 4 = -4(1 - Cos^2\varphi) = -4Sin^2\varphi = [2iSin\,\varphi]^2$$

$$Z_1 = \frac{2Cos\,\varphi + 2iSin\,\varphi}{2} = Cos\,\varphi + iSin\,\varphi = e^{i\varphi}$$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = \frac{2Cos\,\varphi - 2iSin\,\varphi}{2} = Cos\,\varphi - iSin\,\varphi = e^{-i\varphi}$$

$$S = \{e^{-i\varphi};\ e^{i\varphi}\}$$

2 – Donnons la forme trigonométrique des solutions de l'équation

(E_n): $Z^{2n} - 2cos\,\varphi\, Z^n + 1 = 0$ ou $\varphi \in IR^*$

$Z^{2n} - 2cos\,\varphi\, Z^n + 1 = 0 \Rightarrow X^2 - 2cos\,\varphi\, X + 1 = 0$ avec Z^n

D'après l question précédente, $\begin{cases} X_1 = z_1^n = e^{i\varphi} \\ X_2 = z_2^n = e^{-i\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = re^{i\theta} \\ Z_2 = re^{-i\theta} \end{cases}$ avec $\theta = \frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}$, $r = 1$ $k \in \{0; 1; ..n-1\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1 = re^{i\theta} = Cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right) + iSin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right) \\ Z_2 = re^{-i\theta} = Cos\left[-\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] + iSin\left[-\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \end{cases} \quad k \in \{0; 1; ..n-1\}$$

$$S = \left\{Cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right) + iSin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right); Cos\left[-\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] + iSin\left[-\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right];\ k \in \{0; 1; ..n-1\}\right\}$$

I- **Soit $P_\varphi(Z) = Z^{2n} - 2cos(\varphi)Z^n + 1$**

1- Montrons que : $P_\varphi(Z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[Z^2 - 2cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)Z + 1\right]$

$P_\varphi(Z) = Z^{2n} - 2cos\,\varphi\, Z^n + 1 \Rightarrow (Z - Z_1)(Z - Z_2)$

$P_\varphi(Z) = Z^{2n} - 2cos\,\varphi\, Z^n + 1$

$\Rightarrow (Z - Z_1)(Z - Z_2)$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}(Z - Z_1)\prod_{k=0}^{n-1}(Z - \overline{Z_1})$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left(Z - e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(Z - e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[Z^2 - Z\left(e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right) + e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right]$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[Z^2 - 2\left(\frac{e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}{2}\right)Z + e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{n} - \frac{\varphi}{2} - \frac{2k\pi}{n}\right)}\right]$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[Z^2 - 2cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)Z + 1\right]$ **C.Q.F.D**

1- a- Calculons $P_\varphi(1)$

- $P_\varphi(1) = (1)^{2n} - 2cos\,\varphi\,(1)^n + 1 = 2 - 2cos\,\varphi = 2(1 - cos\,\varphi)$ (1)
- $P_\varphi(1) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[(1)^2 - 2cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)(1) + 1\right] = \prod_{k=0}^{n-1}\left[2 - 2cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ (2)

b-Déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\left[sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right] = \frac{sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}}$

(2)$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[2 - 2cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}2\left[1 - cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}4\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$ car $2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - Cos(x)$

$\Rightarrow 4^{n-1-0+1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$

$\Rightarrow 4^n\prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$ (3)

(3) = (1) $\Leftrightarrow 4^n\prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = 2(1 - cos\,\varphi)$

$$\Leftrightarrow 4^n\prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = 4\left(Sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{4Sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^n}$$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left[Sin^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{Sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}}$ *D'où le résultat*

3 − $\forall\varphi \in]0;\pi[$ *et* $\forall n \geq 2$, *on pose* $H_n(\varphi) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\varphi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$

✓ **Montrons que** $2^{n-1}H_n(\varphi) = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}$

On a: $\prod_{k=0}^{n-1}\left[1\,\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{4\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^n} \Leftrightarrow \left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{(0)\pi}{n}\right)\right]\prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}}$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n}\right)\right]\prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4^{n-1}\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n}\right)\right]}$$

$$\Leftrightarrow 4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\left[\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\varphi}{2n}\right)\right]} \Leftrightarrow \left(2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}$$ *d'ou le résultat*

On pose : $\forall\, n \in IN^*$ $\quad K_n(\varphi) = 2^{n-1}H_n(\varphi)$

a- Calculons $\lim\limits_{\varphi\to 0}(K_n(\varphi))$; $W_n = \lim\limits_{\varphi\to 0}(H_n(\varphi))$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n)$ (*on rappel que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right) = 0$ *si* $a > 1$

➢ ***Calculons*** $\lim\limits_{\varphi\to 0}(K_n(\varphi))$

$$\lim_{\varphi\to 0}(K_n(\varphi)) = \lim_{\varphi\to 0}(2^{n-1}H_n(\varphi)) = \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}\right) = \lim_{\varphi\to 0}\left[\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)\times\left(\frac{1}{\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}\right)\times\left(\frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}{\frac{\varphi}{2n}}}\right)\right]$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)\times\lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}\right)\times\lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2n}\right)}{\frac{\varphi}{2n}}}\right) = 1\times n\times\frac{1}{1} = n \quad \left(car \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Sin}(ax)}{(ax)}\right) = 1\right)$$

➢ ***Calculons*** $W_n = \lim\limits_{\varphi\to 0}(H_n(\varphi))$

On a : $\lim\limits_{\varphi\to 0}(K_n(\varphi)) = \lim\limits_{\varphi\to 0}\left(2^{n-1}H_n(\varphi)\right) = n$

$\Leftrightarrow 2^{n-1}\lim\limits_{\varphi\to 0}(H_n(\varphi)) = n$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\varphi\to 0}(H_n(\varphi)) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Donc $W_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

➢ ***Calculons*** $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}(W_n)$

$$\lim_{\varphi\to+\infty}(W_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{2^n}\right) = +\infty$$

EXERCICE 2 (*Uniquement* Tle D-TI)

Soit l'équation $(E) : Z \in \mathbb{C}, Z^n = -\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{2}i,\ n \in IN^*$.

Déterminons les solutions Z_k *de* (E).

$\left|\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right| = \frac{\sqrt{(-9\sqrt{3})^2+27^2}}{2} = \frac{\sqrt{972}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

$arg\left(\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *car* $\begin{cases}\cos\theta = \frac{-9\sqrt{3}}{2\times 9\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{27}{2\times 9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

$\Rightarrow \begin{cases} r^n = 9\sqrt{3} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi\end{cases}$ $k \in \{01; 2 \dots n-1;\}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\end{cases}$

$Z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} k \in \{01; 2 \dots n-1;\}$

2- Déterminer les solutions Z_k ***de*** (E). ***On pose*** $n = 5$

$n = 5,\quad Z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}}\ e^{i\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)} k \in \{01; 2; 3; 4 \dots 4\}$ *et* $\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$k = 0;\quad Z_0 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{5}}$	$k = 3;\quad Z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$k = 1;\quad Z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{8\pi}{15}}$	$k = 4;\quad Z_4 = \sqrt{3}e^{i\frac{26\pi}{15}}$
$k = 2;\quad Z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{14\pi}{15}}$	$S = \left\{\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{5}};\ \sqrt{3}e^{i\frac{8\pi}{15}};\ \sqrt{3}e^{i\frac{14\pi}{15}};\ \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}};\ \sqrt{3}e^{i\frac{26\pi}{15}}\right\}$

3- Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ***les points images de solutions*** Z_k ***de (E).***

Tous ces points image appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{3}$ ***(il sont cocyclique)***

♣ **On pose** $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a- *Soit* $J = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; *Exprime α en fonction de* $\bar{J}$.

$$\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ or } J = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ==> \omega = \sqrt{3}\,\bar{J}$$

b- ***Prouver que α est une solution de l'équation :*** $Z^5 = \left(\frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}\right)$

$$\omega^5 = \left(\sqrt{3}\bar{J}\right)^5 = \left[\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^5 = -\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{2}i \quad car\ \bar{J}^5 = \left(\bar{J}^2\right)\left(\bar{J}^2\right)\left(\bar{J}\right) = J^2.\bar{J} = J$$

$d'ou\ \ \omega\ est\ la\ solution\ de\ l'equation\ , Z^5 = -\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{2}$

1- ***Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe Z associe le point M' de P d'affixe Z' tels que :*** $Z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right)Z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a- ***Ecrire la forme algébrique du nombre complexe*** $b = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$:

$$b = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i) = 2 + \sqrt{3} + 3i - 2i - i\sqrt{3} + 3 = 5 + \sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i$$

Donner la nature de T et précise ses éléments caractéristiques :

$$Z' = \omega Z + \frac{1}{2}b \quad car\ \ \omega = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \frac{1}{2}b = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$|\omega| = |\sqrt{3}\,\bar{J}| = \sqrt{3} \quad car\ |\bar{J}| = 1;\ \ arg(\omega) = Arg(\sqrt{3}\,\bar{J}) = -\frac{3\pi}{3}$$

$$soit\ \ \Omega\ \ le\ centre\ Z_\Omega = \frac{\frac{1}{2}b}{1-\omega} = \frac{\frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i}{1-\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{5+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+3i} = \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}+3i)}{2+\sqrt{3}+3i} = 1-i$$

$$Car\ \ 5 + \sqrt{3} + (1-\sqrt{3}) = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$$

Donc (T) est une suite direct de centre $\Omega(1-i)$ ***de rapport*** $k = \sqrt{3}$ ***et d'angle*** $\Theta = -\frac{2\pi}{3}$

EXERCICE 3

I- *On considère la suite* (U_n) *définie par son premier terme* $U_0 = 1$ *et* $U_1 = 2$ *et pour la relation de récurrence :* $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n$ (1).

1- *Montrons que la suite* (V_n) *définie par* $V_n = U_{n+1} - U_n$ *est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.*

$on\ a: V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$

$= \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n - U_{n+1}$

$= \left(\frac{2}{5} - 1\right)U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n$

$= -\frac{3}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n$

$= -\frac{3}{5}(U_{n+1} - U_n) = -\frac{3}{5}V_n$

Donc V_n *est une* est une suite géométrique

le premier terme est $V_0 = U_{0+1} - U_0$

$V_0 = U_1 - U_0 = 2 - 1 = 0$ et la raison est $-\frac{3}{5}$

2- 2- Déterminons V_n **en fonction de n. En déduire** U_n **en fonction de n**

$$V_n = V_0 q^n = (1)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

Posons $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \ldots + V_n$ or V_n ***est une*** *est une suite géométrique de raison* $-\frac{3}{5}$

$$\textbf{Donc}: S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \ldots + V_n = V_0 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] \qquad S_n = \frac{5}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$$

Exprimons S_n en fonction de U_n

on a: $V_n = U_{n+1} - U_n$

$V_0 = U_1 - U_0$

$V_1 = U_2 - U_1$

. . .

$V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$

En additionnant membre à membre et n simplifiant, on a :

$$V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \ldots + V_n = -U_0 + U_{n+1}$$

$$soit\ \ S_n = -U_0 + U_{n+1} \Rightarrow U_{n+1} = U_0 + \frac{5}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow U_n = U_0 + \frac{5}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

$$\mapsto U_n = 1 + \frac{5}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right] = 1 + \frac{5}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

Conclusion : $\forall n \in IN; U_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

1- ***Déterminons la limite de un quand n tend vers $+\infty$.***

$\forall n \in IN; U_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^n \quad \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1 \quad$ *donc* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$, *d'ou* $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(U_n) = \frac{13}{8}$

I- **On définit la suite (W_n) par ses premiers termes W_0 et W_1 avec : $(W_0; W_1) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \sqrt[5]{(W_{n+1} \times W_n)^2 W_n}$.**

1- **Montrons que la suite (Z_n) par $Z_n = \ell n(W_n)$** (*où ℓn désigne le logarithme népérien*) **vérifie la relation (1).**

$Z_{n+2} = \ell n(W_{n+2})$

$= \ell n\left(\sqrt[5]{(W_{n+1} \times W_n)^2 W_n}\right)$

$= \ell n[(W_{n+1})^2 (W_n)^3]^{\frac{1}{5}}$

$= \ell n[W_{n+1}]^{\frac{2}{5}} + \ell n(W_n)^{\frac{3}{5}}$

$= \frac{2}{5}\ell n(W_{n+1}) + \frac{2}{5}\ell n(W_n)$

Donc $Z_n = \frac{2}{5}\ell n(Z_{n+1}) + \frac{2}{5}\ell n(Z_n)$

Or $Z_n = \ell n(W_n)$ *et* $Z_{n+1} = \ell n(W_{n+1})$

Donc $Z_{n+2} = \frac{2}{5}Z_{n+1} + \frac{3}{5}Z_n$ *d'où la suite définie par*

$Z_n = \ell n(W_n)$ *vérifie la relation* **(1)**

2- ***Déduisons-en-la $\lim\limits_{n\to\infty}(Z_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n)$***

Si la suite Z_n vérifie la relation (1), alors les suites Z_n ***et W_n on la meme nature.***

Or *on a:* $V_n = U_{n+1} - U_n$ *donc pout toute suite* Z_n; $\exists !$ *suite* V_n *telle que* $V_n = Z_{n+1} - Z_n$,

C'est a dire $V_0 = Z_1 - Z_0 = \ell n(W_1) - \ell n(W_0) = \ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right) \quad V_0 = \ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)$

De plus, on sait que $S_n = V_0 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} = -U_0 + U_{n+1}$

Donc $V_0 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} = -Z_0 + Z_{n+1} \Rightarrow Z_{n+1} = V_0 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} + Z_0$, or $\quad Z_0 = \ell n(W_0)$ *et* $V_0 = \ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(Z_n)$

on a: $Z_n = \ell n(W_n) \Rightarrow W_n = e^{Z_n}$

$\Rightarrow Z_{n+1} = \ell n(W_0) + \ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\left[\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}\right]$

$= \frac{5}{8}\ell n(W_1) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$

$Z_{n+1} = \frac{5}{8}\ell n(W_0) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{8}\ell n(W_0) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{8}\ell n(W_1) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right)$ Car $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$,

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(Z_n) = \left(\frac{5}{8}\ell n(W_1) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right)$

$= \left(\left(1-\frac{5}{8}\right)\ell n(W_0) + \frac{5}{8}\ell n(W_1)\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(Z_n) = \frac{3}{8}\ell n(W_0) + \frac{5}{8}\ell n(W_1)$

➢ $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n)$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n) = e^{\frac{3}{8}\ell n(W_0) + \frac{5}{8}\ell n(W_1)} = e^{\ell n(W_0)^{\frac{3}{8}}} \times e^{\ell n(W_1)^{\frac{5}{8}}} = (W_0)^{\frac{3}{8}} \times (W_1)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{W_0^3 \times W_1^5}$

Conclusions : $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n) = \sqrt[8]{W_0^3 \times W_1^5}$

EXERCICE 4 4.5pts

Soit ***f et h*** *deux fonctions définies sur* $I =]0; +\infty[$ *par :* $f(x) = (1 + lnx)^2 - 2x$ *et:* $h(x) = -x + lnx + 1$ Cf *la courbe representative de **f** dans le repère orthonormé* (***unité : 5cm***).

1- ***Etudions le sens de variation de h; puis Déduisons-en, pour tout x de I, le signe de h (x).***

♣ ***Etudions le sens de variation de h***

$\forall x \in]0; +\infty[\ h'(x) = (-x + lnx + 1)' = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$ **donc** $h'(x) = \frac{-x+1}{x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

✓ $\forall x \in]0; 1[, h'(x) \geq 0$ ***donc h(x) est strictement croissante***

✓ $x \in]1;+\infty[, \hbar'(x) \leq 0$ *donc* $h(x)$ *est strictement decroissante*

♣ ***Déduisons-en, pour tout x de I, le signe de $\hbar(x)$***

$\hbar(1) = -1 + ln(1) + 1 = \mathbf{0}$

$\forall x \in]0;+\infty[, \hbar(]0;+\infty[) \geq 0$ donc $\hbar(x)$ *est* du signe positive

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$
		-1	

2- Déterminons la limite de f en 0. Qu'en déduisez-vous pour la courbe Cf? **[0,75pt]**

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}((1+lnx)^2 - 2x) = (1-\infty)^2 - 2(0) = +\infty$$

comme $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$, *on peut en deduire que la* Droite (D) d'équation $x = 0$ *est* une asymptote verticale a la courbe de f

3- Montrons que, pour tout x de I, on peut écrire: $f(x) = x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right]$.

$$f(x) = (1+lnx)^2 - 2x \Rightarrow 1^2 + 2lnx + (lnx)^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + \frac{(lnx)^2}{x} - 2\right] \quad (\textit{en mettant } x \textit{ en facteur})$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + \frac{\left(ln(\sqrt{x})^2\right)^2}{(\sqrt{x})^2} - 2\right] \quad (car(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + \left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right]$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + 4\left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right] \quad \text{CQFD}$$

4- Déduisons-en l'étude des branches infinie a la Coubes de f. **[0,75pt]**

➢ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{lnx}{x} + 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\right]\right) = +\infty\left[\frac{1}{+\infty} + 2\underbrace{\left(\frac{lnx}{x}\right)}_{0} + 4\underbrace{\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}_{0}^2 - 2\right] = +\infty(0+0-2) = -\infty$

➢ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x} + 2\left(\frac{lnx}{x}\right) + 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right] = -2$

➢ $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty}((1+lnx)^2 - 2x - (-2x)) = \lim_{x\to+\infty}((1+lnx)^2) = +\infty$

(D') d'équation $y = -2x$ *est* une asymptote oblique a la courbe de f

Démontrons la fonction dérivée $f'(x)$ *de* f *est* : $f'(x) = \frac{2\hbar(x)}{x}$.

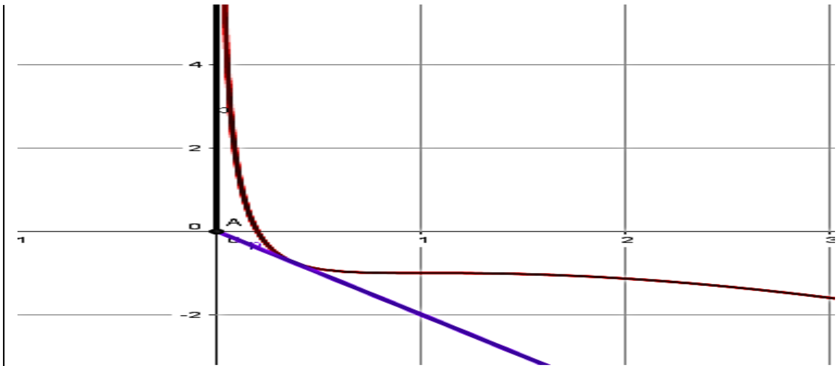
$\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = [(1+lnx)^2 - 2x]' = 2(1+lnx)\frac{1}{x} - 2 = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} - 1\right] = 2\left[\frac{-x+lnx+1}{x}\right] = \frac{2\hbar(x)}{x}$ cqfd

4- Dressons le tableau de variation de f et tracer Cf ainsi que ses asymptotes éventuels.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f(1) = -1$

D'après la question 1, $\forall x \in]0;+\infty[\ h(x) \leq 0$ *donc* f *est decroissante*

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↘ $+\infty$



PARTIE B. ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES : (5pts)

Tâches 1: Déterminons la nature et un repère de $(\sum)$: $\left(2\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}\right)=\vec{0}$

Soit I le milieu du segment $[GH]$.

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)$.

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IH}\right)$.

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}$

Soit $K=bar\{(F;2),(G;1)\}$

$2\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MH}=2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KF}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KG}\right)$.

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=3\overrightarrow{MK}+\left(2\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}\right)$.

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$

$M\in(\sum)$ équivaut successivement à : $\left(2\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}\right)=\vec{0} \Rightarrow \left(3\overrightarrow{MK}\right)\wedge\left(2\overrightarrow{MI}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow \left(3\overrightarrow{MK}\right)\wedge\left(2\overrightarrow{MI}\right)=\vec{0}$

Donc, $(\sum)$ est la droite de repère $(I\,;\,\overrightarrow{IK})$

Tâches 2: Déterminons le centre et le rayon de (Γ) décrit par les lampes (On déterminera d'abord la nature du triangle formé par les points représentant les positions des lampes plafonnières).

♣ *Résolvons l'équation* (E) : $z^3+\left(1-i\sqrt{3}\right)z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z^2-4i\sqrt{3}$ *en admettant que* $Z_A=1-i\sqrt{3}$ **est solution de E.**

Comme $1+i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :

$$\boldsymbol{P(z)=\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)}$$

$$=z^3+az^2+bz+\left(-1-i\sqrt{3}\right)z^2+\left(-1-i\sqrt{3}\right)za+\left(-1-i\sqrt{3}\right)b$$

$$=z^3+\left(a-1-i\sqrt{3}\right)z^2+\left(b-a-ia\sqrt{3}\right)z+\left(-1-i\sqrt{3}\right)b$$

par identification on a: $\begin{cases} a-1-i\sqrt{3}=1-i\sqrt{3} \\ b-a-ia\sqrt{3}=2\left(1-i\sqrt{3}\right) \\ \left(-1-i\sqrt{3}\right)b=-4-4i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=2 \\ -a\left(1+i\sqrt{3}\right)=2\left(1-i\sqrt{3}\right)-b \\ \left(-1-i\sqrt{3}\right)b=\frac{-4\left(1+i\sqrt{3}\right)}{-\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)}=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

$P(z)=\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)$; $\quad z^2+2z+4=0 \Rightarrow (z-1)^2-1+4=0$

$\Rightarrow (z-1)^2+3=0$

$\Rightarrow \left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=0$

$P(z)=\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z+1+i\sqrt{3}\right)\left(z+1-i\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow z=1-i\sqrt{3}$ ou $z=-1-i\sqrt{3}$ ou $z=1-i\sqrt{3}$

$$\boldsymbol{S=\left\{1-i\sqrt{3}\ ;\ -1-i\sqrt{3}\ ;\ -1-i\sqrt{3}\right\}}$$

♣ **Déterminons une mesure de l'angle orienté par les points représentant les positions des lampes plafonnières).**

Soit **A , B et C** d'affixe respectifs $\boldsymbol{1+i\sqrt{3}}$; $\boldsymbol{-1+i\sqrt{3}}$ **et** $\boldsymbol{-1-i\sqrt{3}}$

$\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{2i\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ Donc, une mesure de l'angle orienté de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

♣ *Déterminons la nature du triangle ABC*

Comme la mesure de l'angle orienté de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$ *alors le triangle ABCest un triangle rectangle en B.*

♣ *Déterminons le centre et le rayon de (Γ).*

Les positions des trois lampes plafonnières sont représentées par points du cercle (Γ).

Les points représentant les positions des lampes plafonnières sont les images des solutions de l'équation P(z) = 0.

*On remarque **A ; B et C** sont les images des solutions de l'équation **P(z) = 0.***

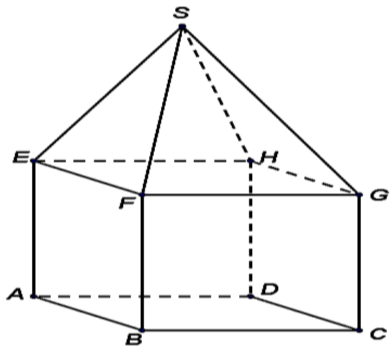
*Donc, (Γ) est le cercle circonscrit au triangle **ABC**. Comme **ABC** est un triangle rectangle en B, le centre de (Γ) est le milieu du segment [AC] et son rayon est* $\boldsymbol{R=\frac{AC}{2}}$

→ $L'affixe\ du\ centre\ est\ Z_O=\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}=0$

→ $R=\frac{AC}{2}=\left|\frac{Z_C-Z_A}{2}\right|=\left|\frac{-1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{4}{2}$ **le centre Pour cela, nous avons besoin du volume V du bâtiment. V = V1 + V2 , où V1 désigne le volume de la toiture et V2 celui de la partie cubique. de (Γ) est le point d'affixe 0 ; le rayon de (Γ) est 2**

Tâches 3: Détermine le type de climatiseur adapté au bâtiment.

Pour cela, nous avons besoin du volume V du bâtiment. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$ *; où* $\boldsymbol{V_1}$ *désigne le volume de la toiture et* $\boldsymbol{V_2}$ *celui de la partie cubique.*



♣ *Déterminons les coordonnées des points F, G, H dans le repère* $(\boldsymbol{A}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{AD}},\overrightarrow{\boldsymbol{AE}})$

✓ ***ABFE étant un carré (en particulier un parallélogramme)***, *alors :*

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$; ; $\overrightarrow{AF}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$ *donc* $\boldsymbol{F(1\,;\,0\,;\,1)}$

✓ ***ADGF étant un parallélogramme, alors***

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AG}=1\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AE}$ *donc* $\boldsymbol{G(1\,;\,1\,;\,1)}$

✓ ***ADHE étant un carré (en particulier un parallélogramme***), alors

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AH}=0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$ *donc* $\boldsymbol{G(0\,;\,1\,;\,1)}$

♣ $V_1=2\left(\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{ES}.\left(\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}\right)\right|\right)uv=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{ES}.\left(\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}\right)\right|uv$;*Dans le repère* $(\boldsymbol{A}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{AD}},\overrightarrow{\boldsymbol{AE}})$ *On a ;* $\boldsymbol{S}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$

$\boldsymbol{E(0;0;1)}$. ***Donc*** $\overrightarrow{ES}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

$$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}=(0;0;1);Donc\ \ \overrightarrow{ES}\left(\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{4}$$

$V_1=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}uv=\frac{1}{12}(8m)^3=\frac{512}{12}m^3=\frac{512}{12}m^3=\frac{128}{3}$; $V_1=\frac{128}{3}m^3$; $V_2=(8m)^3$; $V_2=512m^3$

$V=V_2+V_2=\frac{128}{12}+512=\frac{1664}{12}m^3\approx 554{,}67m^3>500m^3$ *le type de climatiseur adapté au bâtiment est celui de **600 kWh**.*