



L'épreuve comporte trois (03) exercices et une situation problème répartis sur deux pages

PARTIE A : Evaluation des Ressources (15 points)

EXERCICE 1 : 7,25 points (les parties I et II sont indépendantes)

Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Partie I : 4,25 pts

1. a) Montrer que f est paire et g impaire. Vérifier que $f^2(x) - g^2(x) = 1$ 0,5pt
 b) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$ et en déduire les tableaux de variation des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$. 0,75pt
 c) Tracer les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions respectives f et g dans le même repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm 0,5pt
2. a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[1; +\infty[$.
 En déduire que la fonction réciproque ϕ de f est définie par ϕ par $\phi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. 0,5pt
 b) Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repère précédent. 0,5pt
 c) On pose $\alpha = \phi(2)$; $\alpha > 0$ et on note (Δ) la partie du plan qui est délimitée d'une part, par les droites d'équations $y = 0$ et $y = \alpha$, d'autre part par la courbe (C_ϕ) et la droite (D) d'équation $y = x$.
 En utilisant la symétrie orthogonale d'axe (D) . Calculer l'aire en cm^2 de (Δ) 0,75pt
3. On considère par (Σ) la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2f(t) \\ y = 3g(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$
 a) Montrer que (Σ) est une hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ dont on précisera les éléments caractéristiques. 0,5pt
 b) Déterminer l'image (Σ') de (Σ) par l'application S du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 1 - i$. Et construire (Σ) et (Σ') . 0,75pt

Partie II : 2,5 pts

Soit $C(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On appelle H le sous espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ de dimension 2 dont une base est $B = \{f; g\}$ où f et g sont des fonctions définies ci-dessus.

1. On note $F = \{h \in H, h(\ln(2)) = 0\}$ où $\ln$ est le logarithme népérien.
 a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H . 0,5pt
 b) En déduire que F est une droite vectorielle dont on précisera une base. 0,5pt
2. Soit l'application $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}^2$ définition pour $h \in H$ par $\varphi(h) = (h(-\ln(2)); h(\ln(2)))$
 a) Montrer que φ est une application linéaire. 0,5pt
 b) Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ est un isomorphisme. 1pt

EXERCICE 2 : 3,5 points

- I- Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \ln(2\sqrt{2}) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \sqrt{3} \ln(\sqrt{2})$ 1pt
- II- Dans l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 On donne le plan P d'équation cartésienne $2x - y - z + 5 = 0$.
 Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S_P par rapport à P . 1pt
- III- X est une variable aléatoire prenant les valeurs -1, 2, 3 et de probabilités respectives $\ln \alpha$; $\ln \beta$; $\ln \delta$.
 a) Déterminer α, β, δ sachant que l'espérance mathématique $E(X) = 1$ et que α, β, δ sont dans cet ordre une progression géométrique. 1pt
 b) Déterminer $V(X)$. 0,5pt

EXERCICE 3 : 3 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient A et B les points d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$ et $Z_B = 7 + \frac{7}{2}i$. On considère la droite (D) d'équation $4x + 3y = 1$.

- 1) Montrer que l'ensemble des points de (D) à coordonnées entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1; -4k - 1)$ ou $k \in \mathbb{Z}$. 0,75pt
- 2) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2; 3)$.
 - a) Détermine le rapport K et l'angle θ de S . 0,5pt
 - b) Donne l'écriture complexe de S . 0,5pt
- 3) On pose $B_1 = S(B)$ et $\forall n \in \mathbb{N}', B_{n+1} = S(B_n)$.
 - a) Exprimer AB_{n+1} en fonction de AB_n , puis l'angle $(\vec{AB_1}, \vec{AB_n})$ en fonction de n . 0,75pt
 - b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 , et B_n , sont alignés. 0,5pt

PARTIE B : Evaluation des compétences. 4,5 points

Situation :

Pour honorer leur professeur de Mathématiques qui a fait valoir ses droits à la retraite, les élèves d'une classe de Tle C d'un établissement ont décidé de lui offrir une maquette et plusieurs médailles de décoration.

Cette maquette est un quadrilatère $ABCD$ tel que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 10 cm, les sommets sont les points images n appartenant pas à l'axe des ordonnées des solutions de l'équation

$(E): z^3 - 6iz^2 - 12z + 4\bar{z} + 16i = 0$. L'artisan mathématicien chargé de mettre sur pied cette maquette, entreprend pour le positionnement correct des sommets de cette maquette, de procéder par le changement de variable complexe $T = z - 2i$. Cette maquette doit être peinte d'un produit de protection nécessitant 2 cl sur 10 cm² et coutant 5000 FCFA le bidon d'un litre.

A l'intérieur de cette maquette sera gravé en matière dorée en raison de 400 FCFA le cm², le symbole du groupe. En utilisant le modèle informatique, nos camarades constatent que dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm, ce logo est délimité par la parabole de sommet $S(1, 0)$, de paramètre 2, et d'axe focal $(O, \vec{i})$ et la droite passant par les points $A(2; -2)$ et $B(5; 4)$ de cette parabole. Pour mieux cerner ce logo afin d'évaluer son aire, nos amis décident d'utiliser dans ce repère, la similitude S de centre $\Omega(1, 0)$ transformant O en $K(1; -2)$ pour transformer cette parabole.

Ils veulent enfin donner à leur enseignant des petites médailles de décoration dont le nombre, inférieur à 100 ans égale son âge et ils décident de contribuer équitablement. Dans le projet initial, ils sont 7. Il en manquerait alors 6 médailles. Mais avec la publicité auprès des camarades de classe, 18 élèves vont alors donner équitablement ces médailles. Mais il en manquerait alors 15 médailles.

Tâches :

- 1) Quel serait l'âge de cet enseignant ? 1,5pt
- 2) Déterminer la somme qui doit être fournie pour peindre cette maquette ? 1,5pt
- 3) Quelle est la somme qui sera utilisée pour la production du logo ? 1,5pt

Présentation

0,5pt