



BP :28 KEKEM

Examineur : ESSOME MBANG JONAS P.

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

EXERCICE 1

6pts

I) On se propose de résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation (E): $\sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) \sin x + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$.

0,25pt

1. Montrer que $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

1,25pts

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)t - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$.

1,25pts

b) Dédurre les solutions dans $[-\pi; \pi]$ l'équation (E).

II) Soient $Z_1 = i + 1$ et $Z_2 = \sqrt{3}i + 1$.

1. Déterminer l'écriture trigonométrique de Z_1 et Z_2 .

1pt

2. a) Ecrire sous forme algébrique puis sur forme trigonométrique le produit $Z_1 Z_2$.

1,25pts

b) Dédurre les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

1pt

EXERCICE 2

6pts

1. L'unité est le centimètre, soit $G = \overline{\{(A, 2); (B, 3); (C, -3)\}}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\|2\overline{MA} + 3\overline{MB} - \overline{MC}\| = 4$.

1pt

2. Déterminer l'équation paramétrique, puis l'équation cartésienne d'un cercle de centre $A(1; \sqrt{3})$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1pt

3. Le tableau ci-dessous, présente les données statistiques des Notes sur 20 des élèves d'une salle de classe.

Notes des élèves	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 18[	[18; 20[
Nombres d'élèves	3	25	22	18	2

a) Quelle est la population et la nature du caractère étudié ?

0,5pt

b) Déterminer la classe modale puis calculer l'écart-type de cette série statistique.

2pts

c) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

1,5pt

PROBLEME

8pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm sur les axes. On considère la fonction g d'une variable réelle x défini par $g(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$, et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g et ses limites aux bornes

1,25pts

2. a) Montrer qu'il existe a , b et c tels que pour tout x appartenant au D_g , $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

0,75pt

b) Montrer que la droite d'équation (D) : $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe (C) de g .

1pt

c) Déterminer l'équation de l'asymptote verticale (D').

0,5pt

3. a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et déterminer son signe.

1,5pts

b) Montrer que le point $A(2; 5)$ est centre de symétrie à (C).

1,5pts

4. Construire (D), (C) et (D') dans le repère orthonormal.

1,5pts

EXERCICE 1

I) 1) Montrons que $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\&= 3 - 2\sqrt{3\times 2} + 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6}} \quad 0,25 \text{ pt}$$

2a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$-t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)t - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4(-1)\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$= \frac{5+2\sqrt{6}}{4} - \frac{4\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{5-2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$t_1 = \frac{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)}{-2} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$t_2 = \frac{\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}{-2} \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}} \quad 0,25 \text{ pt}$$

b) Déduction des solutions dans $[-\pi, \pi]$ de (E).

$$(E): \sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

Posons $\sin x = t \Rightarrow -t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)t - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$

D'après la question précédente $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $\sin x = t \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \text{ ou } \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{[-\pi, \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

II) 1) Écriture trigonométrique de z_1 et z_2

• z_1 .

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} ; \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

• z_2

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 ; \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

2. $z_1 \cdot z_2$

• Forme algébrique

$$(i+1)(\sqrt{3}i+1) = -\sqrt{3} + i + \sqrt{3}i + 1 \Rightarrow z_1 \times z_2 = (1+\sqrt{3})i + (1-\sqrt{3})$$

• Forme trigonométrique

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(z_1 \times z_2) = \frac{7\pi}{12}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

b) Valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

$$2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = (1+\sqrt{3})i + 1-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{12} = 1-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} = 1+\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 2

1.) Ensemble des points π du plan tel que:

$$\|2\pi\vec{A} + 3\pi\vec{B} - 3\pi\vec{C}\| = 4$$

$$\Rightarrow \|2\pi\vec{A} + 2\pi\vec{A} + 3\pi\vec{A} + 3\pi\vec{A} - 3\pi\vec{A} - 3\pi\vec{A}\| = 4$$

$$\Rightarrow \|2\pi\vec{A} + 2\pi\vec{A} + 3\pi\vec{A} - 3\pi\vec{A}\| = 4 \Rightarrow \|2\pi\vec{A}\| = 4$$

$$\Rightarrow \|2\pi\vec{A}\| = 2 \Rightarrow \pi\vec{A} = 2 \quad 0,25 \text{ pt}$$

l'ensemble des points π du plan est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{2} \text{ cm}$. 0,25 pt

2.) Equation paramétrique de $\mathcal{E}(A, \sqrt{2})$; $A(1, \sqrt{3})$.

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad 0,15 \text{ pt}$$

Equation Cartésienne

$$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0 \quad 0,15 \text{ pt}$$

3.) a) Population étudiée: Les élèves d'une classe. 0,25 pt

Nature Caractère étudié: quantité Continue 0,25 pt

b.) Classe modale: $[112; 114[$ 0,25 pt

• Écart type.

Notes des élèves (x_i)	$[110, 112[$	$[112; 114[$	$[114; 116[$	$[116; 118[$	$[118; 120[$
Nombre d'élèves (n_i)	3	25	22	18	2
Σ	11	13	15	17	19
$n_i x_i$	33	325	330	306	38
Σ	121	169	225	289	341
$n_i x_i^2$	330 363	4225	4950	5202	722

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i x_i}{N} = \frac{1032}{70} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 14,74} \quad \text{Moyenne} \quad 0,15 \text{ pt}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{15462}{70} - (14,74)^2 \quad 0,15 \text{ pt}$$

$$\Rightarrow V = 3,618 \quad \text{Variance.}$$

Écart type: $D = \sqrt{V} \Rightarrow \boxed{D = 1,902}$ 0,15 pt

c) Tableau des Σx_i et Σx_i^2 .

Notes des élèves	Σx_i	Σx_i^2	Σx_i	Σx_i^2	Σx_i	Σx_i^2
Nombre d'élèves	3	25	22	18	2	2
Σx_i	3	28	50	68	70	1032
Σx_i^2	70	67	42	20	2	1032

Preliminaire

1) Demande de la fonction

$$g \text{ sur }]x-2; +\infty[\text{ ; }]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[\quad 0,2 \text{ pt}$$

limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty} \quad 0,2 \text{ pt}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty} \quad 0,2 \text{ pt}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ 0^+ \end{array} \right. = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty} \quad 0,2 \text{ pt}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ 0^- \end{array} \right. = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty} \quad 0,2 \text{ pt}$$

2a) Déterminer les réels a, b et c

$$\frac{x^2 + x + \frac{x-2}{x+3}}{-\frac{x^2 + 2x}{3x} - \frac{-3x + 4}{x}} \quad \text{donc } \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{array} \right. \quad 0,75 \text{ pt}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - g] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+3) + \frac{6}{x-2} - (x+3) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6}{x-2} \right] = 0$$

donc D1: g = x+3 est asymptote oblique à (Eg). 1 pt

c)

Comme $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty$ alorsla droite d'équation D1: x=2 est asymptote verticale à (Eg). 0,16 pt

3a) Calcul de g'(x) et son signe.

$$g'(x) = \frac{(x^2+x)(x-2) - (x-2)(x^2+x)}{(x-2)^2} = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x)}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 + x}{(x-2)^2} \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}} \quad 0,16 \text{ pt}$$

$$g'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 16 + 8 \Rightarrow \Delta = 24 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6}; \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x_2 = 2 + \sqrt{6}$$

x	-∞	2-√6	2	2+√6	+∞
x^2-4x-2	-	0	-	0	+
(x-2)^2	+	+	0	+	+
g'(x)	+	0	-	0	+

Sur $[-\infty; 2-\sqrt{6}] \cup [2+\sqrt{6}; +\infty[$; $g'(x) \geq 0$ donc la fonction g est croissante.

Sur $]2-\sqrt{6}; 2[\cup]2; 2+\sqrt{6}[$; $g'(x) \leq 0$, donc la fonction g est décroissante.

b) Montrons que le point $A(2;5)$ est Centre de Symétrie de $(\mathcal{C})$.

On a l'équation que: $g(4-x) + g(x) = 10$

$$4-x + 3 + \frac{6}{4-x-2} + x + 3 + \frac{6}{x-2}$$

$$= 10 - \frac{6}{x-2} + \frac{6}{x-2}$$

$$= 10$$

donc $A(2;5)$ est Centre de Symétrie de g .

4.) Construisons (D) , (C) et (D') dans un repère orthonormal.

* Tableau de Variations

x	$-\infty$	$2-2\sqrt{6}$	2	$2+2\sqrt{6}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 5-2\sqrt{6}$		$\nwarrow +\infty$	$+\infty$

