

PREMIER DEVOIR DU PREMIER SEMESTRE

Classe : 1^{ère} F4

EPREUVE : PCT

DUREE : 3h

EXERCICE 1

1) Le plan étant muni du repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(-2; 2)$, et les vecteurs :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \text{ et } \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$$

a) Démontrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une base de V .

b) Déterminer les coordonnées de \vec{i} et \vec{j} dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

2) Soit (x, y) les coordonnées du point M dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ et (x', y') ses coordonnées dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

a) Ecrire les expressions vectorielles de \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{AM} .

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

EXERCICE 2

Dans l'ensemble V des vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne : $\vec{u} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$; $\vec{v} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{-\sqrt{3}}{3} \right)$ et $\vec{w} \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{6} \right)$.

Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de V .

EXERCICE 3

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :
 $A(2; 0; -1)$; $B(0; 3; 1)$ et $C(-1; 1; 1)$.

a) Calculer les distances AB ; BC et AC .

b) Déterminer l'aire S du triangle ABC tel que : $S = \left\| \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{2} \right\|$

EXERCICE 4

On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Calculer et comparer :

- a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$
- b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- c) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

EXERCICE 5

1) On donne : $\|\vec{a}\| = 6$; $\|\vec{b}\| = 5$. Sachant que \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux, calculer :
 $(\vec{a} - 2\vec{b})^2$; $(3\vec{a} - 6\vec{b})^2$; $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$

2) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

Calculer :

- a) $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v})^2$;
- b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$ et $(3\vec{u} + \vec{v})^2$