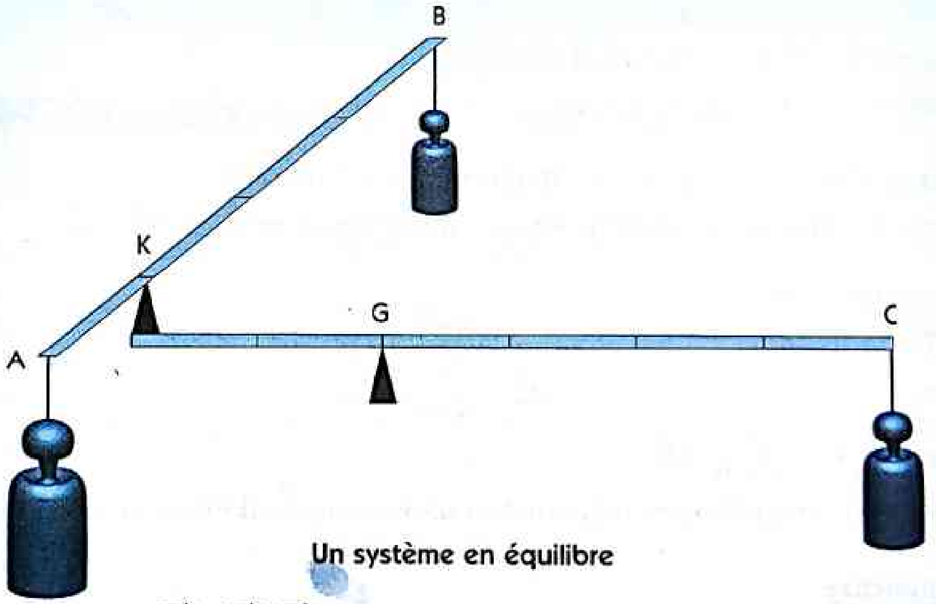
1

BARYCENTRE

Introduction

Nous disposons de plusieurs outils pour aborder les problèmes de géométrie : les configurations, le calcul vectoriel, l'outil analytique et les transformations. L'outil barycentre vient s'ajouter à ce riche répertoire. Il permet de résoudre certains problèmes de réduction d'une somme de vecteurs, d'alignement de points, de concours de droites et de recherche de lieux géométriques.



Un système en équilibre

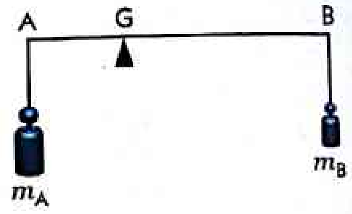
$$\begin{cases} 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}. \\ 4\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}. \end{cases} \quad \text{ou} \quad 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

SOMMAIRE

1 Barycentre de deux points pondérés

1.1. Premières notions

Introduction



Soit le système constitué par une tige AB de masse négligeable portant à ses extrémités deux masses m_A et m_B. Comment doit-on poser la tige sur un pointeau pour qu'elle reste en équilibre :

- lorsque $m_A = m_B$?
- lorsque $m_A = 2m_B$?
- lorsque $m_B = 3m_A$?

En faisant varier les masses m_A et m_B, on constate, dans chaque cas, que la tige reste en équilibre lorsque le pointeau se trouve en un point G, situé entre A et B, tel que : $m_A \times GA = m_B \times GB$;
c'est-à-dire : $m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
En physique, on dit que G est le centre de gravité du système. En mathématiques, on dit que G est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients m_A et m_B.

Théorème et définitions

Théorème

Soit A, B deux points du plan et a, b deux nombres réels.
Si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

On pose : $\overrightarrow{u} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

On sait que, étant donnés un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un point G unique tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{u}$.

Remarque

Si $a + b$ est nul, alors a et b sont opposés et : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} - a\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow a\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.

On distingue deux cas :
- *si $a = 0$ ou $A = B$, alors tout point G du plan vérifie l'égalité : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$;*
- *si $a \neq 0$ et $A \neq B$, alors aucun point du plan ne vérifie cette égalité.*

Définitions

- **On appelle point pondéré tout couple (A,a) où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé coefficient du point A.**
- **Soit (A,a) et (B,b) deux points pondérés tels que : $a + b \neq 0$.**

On appelle barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

On note : G = bar{(A,a), (B,b)} ou $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline\end{array}$.

Remarques

- *On retiendra également de la démonstration du théorème précédent que G est le barycentre de (A,a) et (B,b) si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$; cette égalité permet en particulier la construction du point G.*
- *Si A et B sont distincts, alors G appartient à la droite (AB).*
- *Si A = B, alors G = A.*

Exemples

- Le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3) est le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

- Le barycentre J des points pondérés (C,2) et (D,–1) est le symétrique de D par rapport à C. En effet, $2\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{CD}$.

- Le barycentre de (E,1) et (F,1) est le milieu I du segment [EF]. En effet, $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0}$.

1.2. Propriétés

Homogénéité

Propriété

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

En effet, pour tout nombre réel k non nul : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Ensemble des barycentres de deux points distincts

Un point G est barycentre de deux points A et B s'il existe un couple (a,b) de nombres réels tel que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

Démonstration

- On a vu que si G est barycentre de deux points distincts A et B, alors G appartient à la droite (AB).
- Réciproquement, soit G un point de la droite (AB).

Il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$, ou encore : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{k}{(1-k)+k}\overrightarrow{AB}$.

G est donc le barycentre de $(A, 1-k)$ et (B,k).

L

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F, on peut procéder par double inclusion :

$$(E = F) \quad \Leftrightarrow \quad (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Exemple

Dans la démonstration précédente :

E est l'ensemble des barycentres des points A et B ;

F est la droite (AB).

Cas particuliers

A est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,0). B est le barycentre des points pondérés (A,0) et (B,1).

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A,a) et (B,b) des points pondérés. Pour tout point M du plan :

- **si $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$, où G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) ;**
- **si $a + b = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.**

Démonstration

- Si $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$
$= (a+b)\overrightarrow{MG} + (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB})$
$= (a+b)\overrightarrow{MG}$.

- Si $a + b = 0$, alors $a = -b$
et $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = -b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$
$= b\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.

Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,– 2) et (B,5).

- Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- Calculer les coordonnées du point G.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ et si G est le barycentre de (A,a) et (B,b), alors $G\begin{pmatrix}\dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}\\[2mm]\dfrac{ay_A + by_B}{a+b}\end{pmatrix}$.

Démonstration guidée

- En appliquant la propriété précédente au point O, vérifier que : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB})$.
- Conclure.

Conservation du barycentre par projection

On sait que la projection conserve le milieu ; le théorème suivant généralise cette propriété.

Théorème

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces deux points affectés des mêmes coefficients.

On dit que la projection conserve le barycentre.

Démonstration guidée

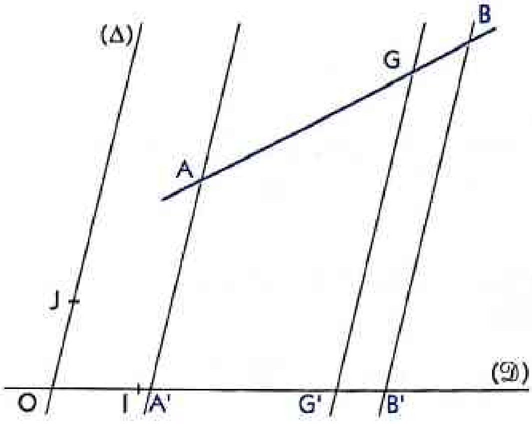
Soit G le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et G', A', B' les images respectives de G, A, B par la projection sur une droite ($\mathcal{D}$) parallèlement à une droite (Δ).

On munit le plan d'un repère (O, I, J) tel que :

(OI) = ($\mathcal{D}$) et (OJ) = (Δ).

Soit (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées respectives des points A et B dans le repère (O, I, J).

- Déterminer les coordonnées de G, A', B' et G' en fonction de x_A, y_A, x_B et y_B.
- Vérifier que G' est le barycentre des points pondérés (A',a) et (B',b).



1.3. Travaux dirigés

1. Une construction vectorielle du barycentre de deux points pondérés

Soit A, B deux points distincts du plan et a, b deux nombres réels non nuls.

M étant un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB), on considère le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$.

1°) Démontrer que M et M' sont deux points distincts et exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2°) On suppose $a + b \neq 0$.

***a)* Démontrer que les droites (AB) et (MM') sont sécantes en un point G, barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).**

b) Application

Construire le point G_1, barycentre de (A,–2) et (B,5), puis le point G_2, barycentre de (A, $\frac{3}{2}$) et (B,1).

Solution

1°) M n'appartenant pas à la droite (AB) et les nombres réels a, b étant non nuls, les vecteurs $a\overrightarrow{MA}$ et $b\overrightarrow{MB}$ ne sont pas colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ n'est donc pas nul et M ≠ M'.

$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

$\quad = (a + b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB}$.

2°) On suppose $a + b \neq 0$.

a) On a : $(a + b)\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MM'} - b\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, sinon le vecteur non nul $(a + b)\overrightarrow{MA}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, ce qui est impossible car M n'appartient pas à la droite (AB) ; les droites (AB) et (MM') sont donc sécantes.

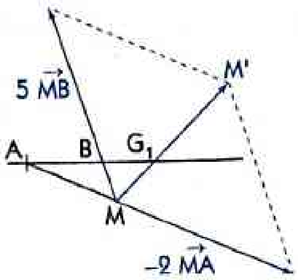
Désignons par G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

On sait que : G ∈ (AB) et $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

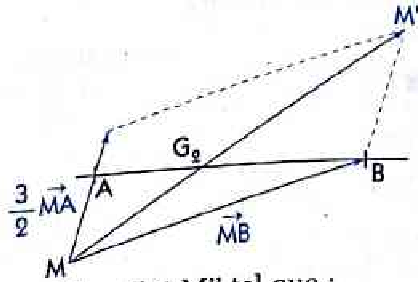
D'où : $\overrightarrow{MM'} = (a + b)\overrightarrow{MG}$ et G ∈ (MM').

Les droites (AB) et (MM') sont sécantes en G.

b) Les figures ci-dessous indiquent la construction des points G_1 et G_2 :



- On construit le point M' tel que :
$\vec{MM'} = -2\vec{MA} + 5\vec{MB}$.
- G_1 est le point d'intersection de (AB) et (MM').



- On construit le point M'' tel que :
$\vec{MM''} = \frac{3}{2}\ \vec{MA} + \vec{MB}$.
- G_2 est le point d'intersection de (AB) et (MM'').

2. Soit G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b). Discuter, suivant les valeurs des coefficients a et b, la position de G par rapport aux points A et B.

Solution guidée

- En utilisant l'égalité $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ (1), justifier que : $|a|$ GA = $|b|$ GB (2).
- Déduire de (1) que :
  - si $ab > 0$, alors G appartient au segment [AB] privé des points A et B ;
  - si $a = 0$, alors G = B ; si $b = 0$, alors G = A ;
  - si $ab < 0$, alors G appartient au complémentaire du segment [AB] dans la droite (AB).
- Déduire de (2) que G est plus proche du point qui a le plus grand coefficient en valeur absolue.
- Vérifier que l'on obtient les résultats suivants :

$ab < 0$ et $|a| > |b|$

$ab > 0$ et $|a| > |b|$

$ab > 0$ et $|a| < |b|$

$ab < 0$ et $|a| < |b|$

Exercices

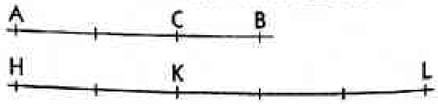
1.a Soit deux points A et B. On considère le point G, barycentre des points pondérés (A,2222) et (B,3333). Exprimer le vecteur $\vec{AG}$ en fonction du vecteur $\vec{AB}$.

1.b A, B et G sont des points tels que : $\vec{AG} = 7\vec{AB}$. Déterminer un couple (a,b) de nombres réels tels que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

1.c Le plan est muni d'un repère. On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, G le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1). Déterminer les coordonnées de G.

1.d Soit deux points A et B.
Construire le point G, barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).
Construire le point G', barycentre des points pondérés (A,– 1) et (B,3).

1.e Écrire chaque point comme le barycentre des deux autres dans les deux cas suivants :



1.f Sur la figure ci-dessous, placer le barycentre des points pondérés (A,3) et (B,2), et celui des points (A,– 3) et (B,13).

2 Barycentre de plus de deux points pondérés

2.1. Théorème et définition

Théorème

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés.
Si $a + b + c \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff (a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$
$$\iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Cette dernière égalité justifie l'existence et l'unicité du point G.

Définition

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

On note : G = bar{(A,a), (B,b), (C,c)} ou G = bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline\end{array}$.

Remarques

- *Si l'un des coefficients est nul, par exemple a, alors G est le barycentre de (B,b) et (C,c).*
- *Cette définition et la remarque précédente se généralisent à 4 points (et plus).*

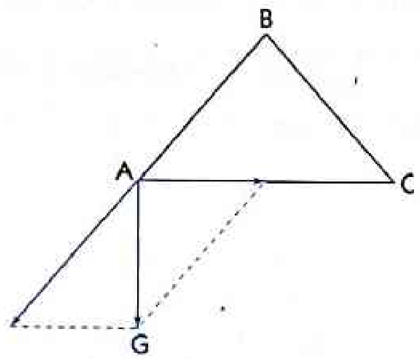
Exemple

Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés (A,3), (B,–2) et (C,1).

Le point G cherché est tel que : $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ (1).

$$(1) \iff 3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$
$$\iff 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

On en déduit la construction ci-contre.



2.2. Propriétés

Homogénéité

Propriété

Le barycentre de trois (ou plus) points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

La démonstration est identique à celle qui a été faite pour deux points.

Remarque

Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points :

- *l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB] ;*
- *l'isobarycentre de trois points A, B et C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC ;*
- *l'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.*

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Propriété

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) des points pondérés. Pour tout point M du plan :

- **si $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$,**
  où G est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) ;
- **si $a + b + c = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.**

Démonstration

- Si $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$
  $= (a + b + c)\overrightarrow{MG}$.
- Si $a + b + c = 0$, alors $a = -b - c$
  et $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (-b - c)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$
  $= b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.

Donc, le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Comme pour deux points, on déduit de cette propriété les coordonnées du barycentre de trois points.

Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et si G est le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c),

alors $G\begin{pmatrix} \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c} \\ \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} \end{pmatrix}$.

Barycentres partiels

ABC est un triangle. Soit G le point défini par l'égalité $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

On désigne par K le barycentre des points (B,–3) et (C,4).

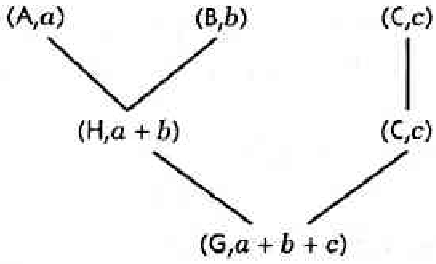
- Écrire G comme barycentre des points A et K.
- En déduire une construction du point G.

Théorème

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$.
Si H est le barycentre de (A,a) et (B,b), alors bar [(A,a), (B,b), (C,c)] = bar [(H,$a + b$), (C,c)].

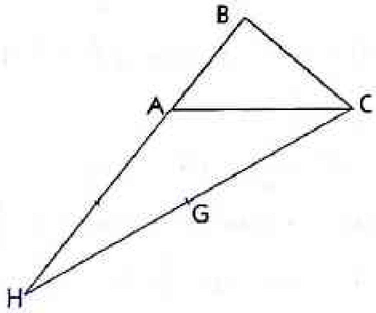
H est appelé barycentre partiel.

Démonstration



Soit G le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c).
On a : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
Or : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GH}$.
D'où : $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
Donc, G est le barycentre de (H,$a + b$) et (C,c).
Cette méthode de détermination du barycentre peut être illustrée par le schéma ci-contre.

Exemple



Reprenons l'exemple du § 2.1.
Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés (A,3), (B,–2) et (C,1), en utilisant le théorème des barycentres partiels.
Si H est le barycentre de (A,3) et (B,–2), alors $\overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{AB}$
et G est le barycentre de (C,1) et (H,1), c'est-à-dire le milieu de [CH].
On en déduit une construction du point H, puis du point G.

Le théorème précédent se généralise à un nombre quelconque de points et permet d'établir le point méthode suivant.

M Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à condition que cette somme soit différente de zéro.

Remarque

Soit un triangle ABC et G le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c). Lorsque $a + b \neq 0$, H est barycentre de (A,a) et (B,b) si et seulement si H est le point d'intersection des droites (AB) et (CG).

2.3. Travaux dirigés

1. Ensemble des barycentres de trois points non alignés

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
1°) Étant donné un point G, démontrer qu'il existe un triplet unique (a,b,c) de nombres réels tels que G soit le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) et $a + b + c = 1$.
2°) *Application*
Déterminer les coefficients a, b et c ($a + b + c = 1$) pour que G soit le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) dans les cas suivants :
***a)* C' est le milieu de [AB] et G est le milieu de [CC'] ;**
***b)* K est tel que $\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{KC}$ et G est tel que $\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AG}$.**

Solution

1°) Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a + b + c = 1$.

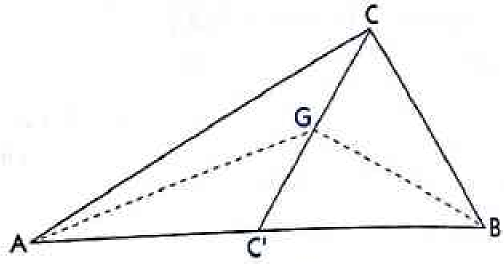
$$G = \text{bar } \{(A,a), (B,b), (C,c)\} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \quad (\text{car } a + b + c = 1)$$

$$\iff G\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \text{ dans le repère } (A, B, C).$$

Tout point G du plan admet un couple unique de coordonnées dans le repère (A, B, C), d'où l'existence et l'unicité des nombres réels b et c, comme du nombre réel a ($a = 1 - b - c$).

2°) *Application*

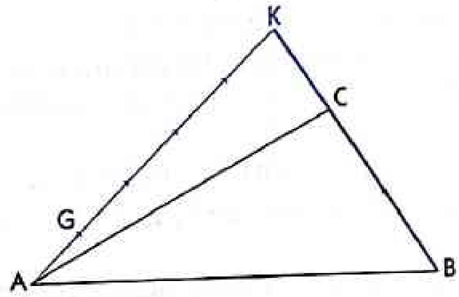


a) On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GC'}$
$= -2\overrightarrow{GC}$.

D'où : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc a, b, c sont proportionnels à 1, 1, 2.

Ainsi : $a = b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{2}$.



b) $-\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, donc : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$.

Or : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AK}$.

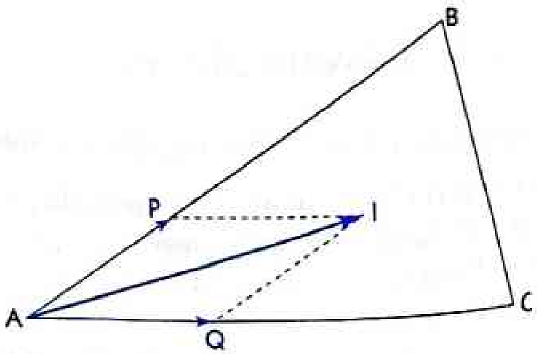
Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{8}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$.

Le point G a pour coordonnées $(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ dans le repère (A, B, C). Donc : $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$ et $c = \frac{3}{8}$.

2. Centre du cercle inscrit dans un triangle

Soit ABC un triangle. On pose : BC = a, AC = b et AB = c.
On désigne par I le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).
1°) Soit P le point de (AB) et Q le point de (AC) tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.
***a)* Démontrer que : $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$.**
***b)* Quelle est la nature du quadrilatère APIQ ? En déduire que le point I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.**
2°) Démontrer que le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution



1°) *a)* On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

D'où : $\overrightarrow{AP} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

On a donc : $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{bc}{a+b+c}$.

b) Le quadrilatère APIQ est un losange car c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux.
I appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

2°) On démontre de même que I appartient aux bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$; I est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

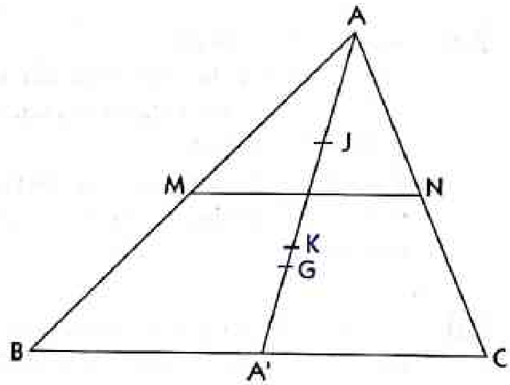
3. Centre d'inertie d'une plaque homogène

On admet les résultats suivants, utilisés en Physique, concernant les plaques homogènes :
– le centre d'inertie d'une plaque triangulaire est l'isobarycentre de ses sommets ;
– si une plaque admet un centre de symétrie I, ce point est le centre d'inertie de la plaque ;
– si une plaque admet un axe de symétrie, le centre d'inertie de la plaque est un point de cet axe ;
– si une plaque P est la juxtaposition de deux plaques P_1 et P_2, de centres d'inertie respectifs I_1 et I_2 et de masses respectives m_1 et m_2, le centre d'inertie de la plaque P est le barycentre de (I_1,m_1) et (I_2,m_2).

Soit ABC un triangle, M et N les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1°) Vérifier que le quadrilatère MNCB est un trapèze et déterminer le centre d'inertie G de ce trapèze, considéré comme une plaque homogène.
2°) Déterminer l'isobarycentre I des points M, N, C, B. Les points I et G sont-ils confondus ?
3°) *Application*
Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des points G et I.

Solution

1°) Dans le triangle ABC, (MN) est la droite passant par les milieux des côtés [AB] et [AC], elle est donc parallèle à la droite (BC). Ainsi, le quadrilatère MNCB est un trapèze.



Le triangle ABC peut être considéré comme la juxtaposition de deux plaques homogènes : le triangle AMN et le trapèze MNCB.

On désigne par J et K les centres d'inertie respectifs des triangles AMN et ABC, c'est-à-dire leurs centres de gravité, et par G le centre d'inertie du trapèze MNCB.

Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Donc : $\frac{\text{aire (AMN)}}{\text{aire (ABC)}} = \frac{1}{4}$ et $\frac{\text{aire (AMN)}}{\text{aire (MNCB)}} = \frac{1}{3}$.

Les plaques AMN, MNCB et ABC sont homogènes, donc leurs masses sont proportionnelles à leurs aires respectives.

Donc, K est le barycentre des points pondérés (J,1) et (G,3).

On a : $\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AK}$ (1).

Soit A' le milieu de [BC] : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

En remplaçant dans (1), on obtient :

$3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (2).

2°) L'isobarycentre I des points M, N, C, B est tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (3).\end{aligned}$$

Le centre d'inertie G du trapèze MNCB et l'isobarycentre I de ses sommets sont donc distincts.

3°) *Application*

On a : $A\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.

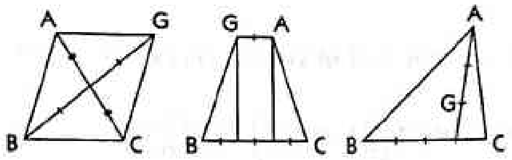
De l'égalité (2), on déduit : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{18}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; donc : $G\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$.

De même, de l'égalité (3), on déduit : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; donc : $I\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}$.

Exercices

2.a Soit A, B, C, D quatre points tels que D soit l'isobarycentre des points A, B et C.
Écrire A comme barycentre des points B, C et D.

2.b Écrire G comme barycentre des points A, B et C dans les trois cas de figure ci-dessous.



2.c Soit ABC un triangle.
1. En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre des points pondérés (A,1), (B,–1) et (C,2).
2. En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire le barycentre des points (A,1), (B,2) et (C,3).

2.d Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On munit le plan du repère (A, B, C).
1. Déterminer les coordonnées de G.
2. Déterminer une équation de chacune des médianes du triangle ABC.
3. Vérifier que le point G appartient à chacune d'elle.

2.e Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].
On désigne par G le point d'intersection des diagonales du trapèze BCB'C'.
1. Que représente G pour le triangle ABC ?
2. Écrire G comme barycentre des points B, C, B' et C'.

2.f Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].
1. Construire l'isobarycentre I des points B, C, B' et C'.
2. Écrire I comme barycentre des points A, B et C.

2.g Soit ABCD un parallélogramme.
1. En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire les points G et G' définis par :
G = bar {(A,–1), (B,4), (C,1), (D,2)},
G' = bar {(A,1), (B,2), (C,3), (D,4)}.
2. Le plan étant muni du repère (A, B, C), calculer les coordonnées des points G et G'.

2.h On considère un triangle ABC.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (C, 2).
2. Exprimer le point C comme barycentre des points A, B et G.

3 Utilisations du barycentre

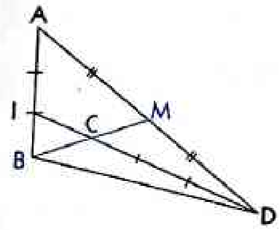
3.1. Problèmes d'alignement et de concours

On peut utiliser les barycentres pour démontrer l'alignement de trois points ou le concours de trois droites. Dans certains cas, cet outil permet de conclure rapidement. Nous allons en observer l'usage à travers quelques exemples.

Alignement de points

Soit ABD un triangle et M le milieu du segment [AD].
Placer les points I et C tels que : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{DC} = \frac{3}{4}\vec{DI}$.
Démontrer que les points B, C, M sont alignés.

Solution



$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{2+1}\overrightarrow{AB}$; donc : $I = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$.

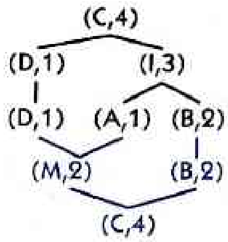
$\overrightarrow{DC} = \frac{3}{1+3}\overrightarrow{DI}$; donc : $C = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline D & I \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$

$= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline D & A & B \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline\end{array}$

$= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline M & B \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array}$.

Les points B, C, M sont donc alignés.

On peut résumer l'argumentation à l'aide du schéma ci-dessous :

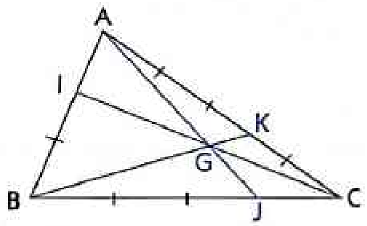


M Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

Concours de droites

Soit ABC un triangle. On désigne par I, J et K les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.
Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

Solution



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$; donc : $I = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}$.

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3+1}\overrightarrow{CB}$; donc : $J = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$.

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3+2}\overrightarrow{CA}$; donc : $K = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$.

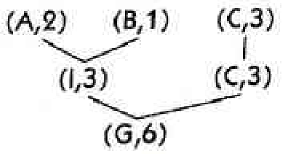
Posons : $G = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}$.

En appliquant trois fois le théorème des barycentres partiels à cette dernière égalité, on obtient :

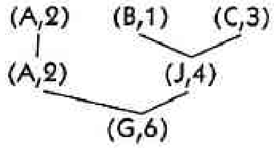
$G = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline I & C \\ \hline 3 & 3 \\ \hline\end{array}$, $G = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & J \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$, $G = \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & K \\ \hline 1 & 5 \\ \hline\end{array}$.

Par conséquent, les droites (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes en G.

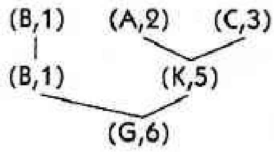
On peut résumer l'argumentation à l'aide des trois schémas suivants :



G ∈ (CI)



G ∈ (AJ)



G ∈ (BK)

3.2. Lignes de niveau

Introduction

Dans les manuels de géographie ou dans les atlas, certaines cartes contiennent des courbes telles que des isothermes ou des courbes de niveau :
– l'ensemble des points où la température moyenne est égale à 28° s'appelle isotherme de 28° ;
– l'ensemble des points de même altitude s'appelle courbe de niveau ou ligne isocline.
On fait ainsi correspondre à chaque point d'une région du globe terrestre un nombre réel.

Définition

- **Soit k un nombre réel et f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$.**
  On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble (E_k) des points M tels que : $f(M) = k$.

Lignes de niveau de $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, a et b deux nombres réels non tous nuls et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = aMA^2 + bMB^2$.

Pour tout nombre réel k, on se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $f(M) = k$.

- **Si $a + b \neq 0$**, désignons par G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

On a :
$$\begin{aligned} aMA^2 + bMB^2 &= a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 \\ &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 + 2\overrightarrow{MG}.(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) \\ &= (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2. \end{aligned}$$

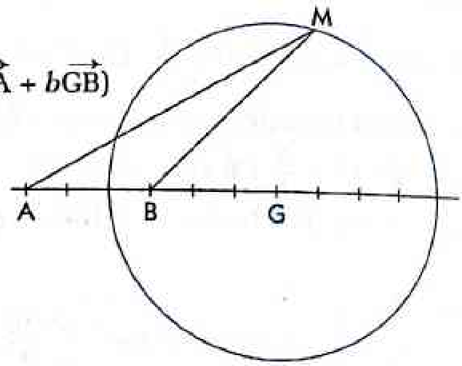
On a donc :
$$f(M) = k \iff (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}.$$

On pose : $\frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b} = \alpha$;

– si $\alpha < 0$, (E_k) est l'ensemble vide ;

– si $\alpha = 0$, (E_k) se réduit au point G ;

– si $\alpha > 0$, (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\alpha}$.



Ensemble des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 = 2$

- **Si $a + b = 0$**, alors $aMA^2 + bMB^2 = a(MA^2 - MB^2)$.

On pose : $k' = \frac{k}{a}$; le problème revient à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k'$.

Soit I le milieu du segment [AB].

On a :
$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} \\ &= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}. \end{aligned}$$

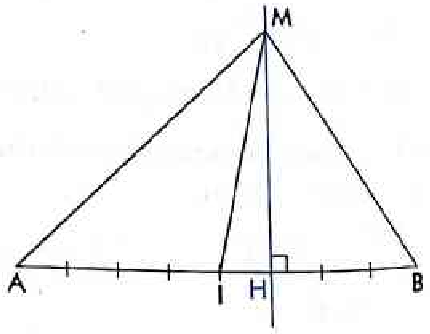
Désignons par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \overline{AB} \times \overline{IH}$.

Donc :
$$f(M) = k \iff 2\overline{AB} \times \overline{IH} = k' \iff \overline{IH} = \frac{k'}{2\overline{AB}}.$$

On en déduit que le point H est indépendant de M.

(E_k) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.



Ensemble des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, a et b deux nombres réels non tous nuls et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = aMA^2 + bMB^2$.

- **Si $a + b \neq 0$, on désigne par G le barycentre de (A,a) et (B,b) ; la ligne de niveau k de l'application f est : ou bien l'ensemble vide, ou bien le point G, ou bien un cercle de centre G.**
- **Si $a + b = 0$, la ligne de niveau k de l'application f est une droite perpendiculaire à (AB).**

L

- a et b sont tous nuls signifie que : $a = 0$ et $b = 0$;
- a et b sont non tous nuls signifie que : $a \neq 0$ ou $b \neq 0$;
- a et b sont tous non nuls signifie que : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Lignes de niveau de $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

Soit A, B deux points distincts du plan et k un nombre réel strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB} = k$.

- Si $k = 1$, alors (E_k) est la médiatrice de [AB].
- Si $k \neq 1$, alors : $\dfrac{MA}{MB} = k \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 - k^2MB^2 = 0$.

On se ramène au problème précédent : déterminer la ligne de niveau 0 de l'application

$M \mapsto aMA^2 + bMB^2$, avec $a = 1$ et $b = -k^2$.

Soit G le barycentre de (A,1) et (B,$-k^2$).

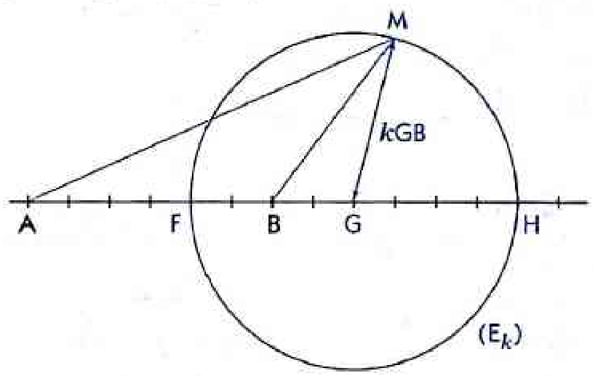
$\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad GA = k^2GB.$

$$M \in (E_k) \quad \Leftrightarrow \quad MG^2 = \frac{GA^2 - k^2GB^2}{k^2 - 1} \quad \text{(d'après le paragraphe précédent)}$$

$$\Leftrightarrow \quad MG^2 = \frac{k^2(k^2-1)GB^2}{k^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad MG = kGB.$$

(E_k) est le cercle de centre G et de rayon kGB.



Ensemble des points M tels que : $\dfrac{MA}{MB} = 2$

Remarques

- *G est extérieur au segment [AB].*
- *$MG^2 = k^2\,GB \times GB$*
  $= GA \times GB$.

Donc : $MG^2 = \overline{GA}\ \overline{GB}$.

Exercices

3.a Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD].
En utilisant les barycentres partiels, démontrer que les segments [IK], [JL] et [MN] ont même milieu.

3.b Soit ABC un triangle. On considère les points D, E, F barycentres respectifs de (A,1) et (B,1), de (A,3) et (C,–1), de (B,3) et (C,1).
Démontrer que E est barycentre des points pondérés (D,3) et (F,–2).
En déduire que les points D, E et F sont alignés.

3.c Soit A et B deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

3.d Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que :
$MA^2 - MB^2 = AB^2$.

3.e Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que :
$MA^2 - MB^2 = 2AB^2$.

3.f Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que : $MA\sqrt{2} = MB$.

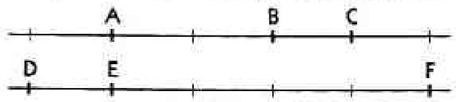
Exercices

APPRENTISSAGE

Barycentre de deux points pondérés

1 On considère un segment [AB].
Placer, sans calcul, le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :
a) $a = 1$ et $b = 2$; *b)* $a = 2$ et $b = -5$;
c) $a = -5$ et $b = -1$; *d)* $a = 10$ et $b = 10$.

2 Pour chaque cas de figure, écrire chacun des trois points comme barycentre des deux autres.



3 Déterminer deux nombres réels a et b tels que C soit le barycentre des points (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :
a) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$; *b)* $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$;
c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$; *d)* $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{AC}$.

4 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, –1) et (B, 4).
1. Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$.
2. Calculer les coordonnées de G.

5 Sur une droite de repère (O, I), on donne les points A et B d'abscisses respectives – 3 et 3.
1. Construire les points C et D tels que :
C est barycentre des points (A,1) et (B, 2) ;
D est barycentre des points (A,1) et (B, –2).
2. Déterminer deux nombres entiers positifs c et d tels que :
A est barycentre des points (C, c) et (D, $-d$) ;
B est barycentre des points (C, c) et (D, d).
3. Soit J le milieu du segment [CD]. Vérifier que :
$OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$ et $JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \times \overline{JB}$.

Barycentre de plus de deux points pondérés

6 Soit A, B, C trois points non alignés et G le barycentre de (A, –3), (B, 1), (C, 1).
1. Démontrer que A est le centre de gravité de GBC.
2. En déduire une construction de G.

7 Les notes sur 20 d'un élève sont 14 en mathématiques, 8 en physique et 5 en français. Les coefficients affectés à ces disciplines sont respectivement 4, 2 et 1.
1. Calculer la moyenne m sur 20 de cet élève.
2. *a)* Sur une droite de repère (O, I), placer les points A, B, C et G d'abscisses respectives 14, 8, 5 et m.
b) Démontrer que G est le barycentre de (A, 4), (B, 2) et (C, 1).

8 Soit ABC et A'B'C' deux triangles de centres de gravité respectifs G et G'.
1. Démontrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC et A'B'C' aient le même centre de gravité.
Application
Soit ABC un triangle et k un nombre réel. On désigne par A', B' et C' les points tels que :
$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

9 Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par C' le milieu de [AB] et par G le point d'intersection de (BD) et (CC').
1. Démontrer que G est le centre de gravité de ABC.
2. Écrire C comme barycentre des points A, B et D.
3. Démontrer que : $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.

10 Soit ABC un triangle, I et K les milieux respectifs des segments [AB] et [IC].
Écrire K comme barycentre des points A, B et C.

11 On considère un triangle ABC. Soit I le milieu de [BC] et G le point de [AI] tel que : $AG = \frac{3}{4}AI$.
1. Écrire G comme barycentre des points A, B et C et déterminer les coordonnées de G dans le repère (B, C, A).
2. On désigne par K le point d'intersection des droites (AB) et (GC). Écrire K comme barycentre de G et C.

12 Soit ABC un triangle équilatéral, I le milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AB).
1. Écrire H comme barycentre des points A et B.
2. Soit K le milieu du segment [IH]. Démontrer que K est le barycentre de (A, 1), (B, 5) et (C, 2).

13 Soit ABC un triangle.
1. Construire le point G, barycentre de (A, 2), (B, –1) et (C, $\frac{3}{2}$).
2. Construire les points P, Q et R tels que :
$\overrightarrow{GP} = 4\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GQ} = -2\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GR} = 3\overrightarrow{GC}$.
Démontrer que le point G est le centre de gravité du triangle PQR.

Utilisations du barycentre

14 Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD] et par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.
1. Démontrer que les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.
2. Soit H le centre de gravité du triangle BCD.
Démontrer que les points A, G et H sont alignés.
Énoncer trois autres alignements de même type.

15 Soit ABC un triangle. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A, I le milieu de [AC] et J le point tel que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les points D, I et J sont alignés.

16 Soit ABCD un quadrilatère, L et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC], I et K les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.
Démontrer que le milieu du segment [IK] appartient à la droite (JL).

17 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points P, Q et R tels que :
$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

18 Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec : $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

19 Soit ABC un triangle. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et par P le point défini par : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes.

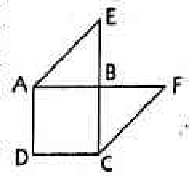
20 Soit A et B deux points du plan tels que AB = 6 et f l'application numérique définie dans le plan par :
$f(M) = MA^2 + MB^2$.
1. Déterminer les lignes de niveau 50, 36, 26, 20 de f.
2. Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k de f :
– est-elle réduite à un point ?
– passe-t-elle par A ?
– passe-t-elle par le symétrique de B par rapport à A ?
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$.

21 On donne un segment [AB].
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : MA = 2MB.

22 On considère un triangle ABC et I le milieu du côté [AB]. Déterminer et tracer la ligne de niveau $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ de l'application définie dans le plan par $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

23 On donne un segment [AB].
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) et (B, –2).
2. Soit M un point du plan.
a) Démontrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$.

24 La figure ci-contre représente une plaque homogène d'épaisseur constante, formée d'un carré ABCD et de deux triangles rectangles isocèles ABE et BCF.
Déterminer la position du centre de gravité de cette plaque.



APPROFONDISSEMENT

25 Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. On désigne par D le symétrique de A par rapport à B, E le symétrique de C par rapport à A et F le milieu de [DE].
Démontrer, en utilisant le théorème des barycentres partiels, que les points F, B' et C' sont alignés. Préciser leurs positions relatives.

26 Soit ABC un triangle, p et q deux nombres réels positifs non nuls. On désigne par G le barycentre de (A, p), (B, q) et (C, q). Les droites (AG), (BG) et (CG) coupent respectivement (BC), (CA) et (AB) en I, J et K.
En utilisant le théorème des barycentres partiels, démontrer que :
a) I est le milieu de [BC] ;
b) les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

27 Soit ABC un triangle. On pose : AB = c, BC = a et AC = b. On désigne par I le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. La droite parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en D.
1. Démontrer que ACD est isocèle et que $\frac{IB}{IC} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les barycentres respectifs de (B, b) et (C, c), de (A, a) et (B, b), de (A, a) et (C, c).
3. Démontrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

28 Soit ABC un triangle. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ (*droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle* $\widehat{A}$) coupe la droite (BC) en K. La parallèle à (AK) passant par C coupe (AB) en C'.
1. Démontrer que le triangle ACC' est isocèle.
2. On pose : AB = c et AC = b.
Démontrer que K est le barycentre de (B, b) et (C, $-c$).

29 Soit ABC un triangle non isocèle en A. Les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ coupent respectivement les côtés [AC] et [AB] en I et J. Les droites (IJ) et (BC) se coupent en K.
1. Écrire K comme barycentre des points I et J, comme barycentre des points B et C.
2. En déduire que (AK) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.
(*On utilisera les propriétés des bissectrices démontrées dans les exercices 27 et 28.*)

30 Soit A et B deux points d'une droite (Δ), a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$.
1. Démontrer qu'il existe deux points C et D tels que C est le barycentre des points (A, a) et (B, b), D est le barycentre des points (A, a) et (B, $-b$).

Préciser la position de ces points par rapport aux points A et B.
2. La droite (Δ) est munie du repère (A, B).
Calculer, en fonction de a et b, les abscisses des points C et D et vérifier que : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.
3. Démontrer que :
a) A est le barycentre des points $(C, a + b)$ et $(D, a - b)$;
b) B est le barycentre des points $(C, a + b)$ et $(D, b - a)$.

31 Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle en A', B' et C'.
1. *a)* Démontrer que : $\frac{\text{aire (MAB)}}{\text{aire (MAC)}} = \frac{A'B}{A'C}$.
b) En déduire que A' est le barycentre des points pondérés (B, aire(MAC)) et (C, aire(MAB)).
2. Soit G le barycentre des points pondérés (A, aire(MBC)), (B, aire(MAC)) et (C, aire(MAB)).
Démontrer que les points G et M sont confondus.
Application
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On pose : $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.
En utilisant les résultats précédents, démontrer que I est le barycentre des points (A, a), (B, b) et (C, c).

32 On considère une droite $(\mathscr{D})$, un point P extérieur à cette droite et H le projeté orthogonal de P sur $(\mathscr{D})$.
À tout point M de la droite $(\mathscr{D})$, on associe le point N barycentre des points pondérés (M, HP^2) et (P, HM^2).
1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HN}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HP}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux.
3. Déduire de la question précédente le lieu des points N lorsque M décrit la droite $(\mathscr{D})$.

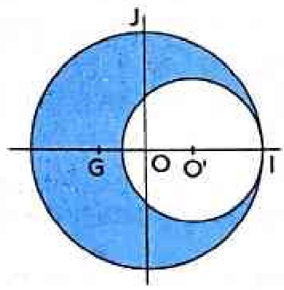
33 ABC est un triangle rectangle en A, tel que $BC = 2a$ et G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$.
1. Démontrer que G et le milieu de [BC] sont symétriques par rapport au point A.
2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2$.
3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$.
Vérifier que A appartient à (E) puis déterminer (E).

34 Soit ABC un triangle. Sur la droite (BC), on choisit un point M distinct de B et de C.
On lui associe le point N de la droite (AB) tel que :
$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC} + \overline{MC}}\overrightarrow{AB}$$
et le point P de la droite (AC) tel que :
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC} + \overline{BM}}\overrightarrow{AC}.$$
1. Vérifier que :
a) M est le barycentre de $(B, \overline{MC})$ et $(C, \overline{BM})$;
b) N est le barycentre de $(A, \overline{BC})$ et $(B, \overline{MC})$;
c) P est le barycentre de $(A, \overline{BC})$ et $(C, \overline{BM})$.
2. Démontrer que les droites (AM), (BP) et (CN) concourent en un point G que l'on déterminera.
3. Déterminer le lieu des points G lorsque le point M décrit la droite (BC).

35 ABC est un triangle.
On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = a \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}$, $\beta = b \cos \widehat{A} \cos \widehat{C}$, $\gamma = c \cos \widehat{A} \cos \widehat{B}$.
On admettra que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
1. Soit H le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déduire de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
3. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

36 Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que :
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
1. *a)* Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
b) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Démontrer que O est le barycentre de $(G, 3)$ et $(H, -1)$.
3. On reprend dans cette question les données et les résultats établis dans l'exercice précédent.
a) Vérifier que : $\beta + \gamma = a \cos \widehat{A}$.
b) Déduire des questions précédentes que O est le barycentre de $(A, a \cos \widehat{A})$, $(B, b \cos \widehat{B})$ et $(C, c \cos \widehat{C})$.

37 Le croissant d'or
Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère une plaque homogène d'épaisseur constante, formée du disque de centre O et de rayon 1, auquel on a enlevé un disque, de rayon r, tangent intérieurement en I au précédent.
1. Déterminer, en fonction de r, la position du point G, centre de gravité de cette plaque.
2. Calculer r pour que le point G soit exactement sur la «frontière» entre les deux disques.
(*On remarquera que la valeur de r trouvée est égale à l'inverse du « nombre d'or ».*)



38 Théorème de Céva[1]
Soit ABC un triangle, A', B' et C' des points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB), distincts des sommets A, B et C.
1. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point G.
a) Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).
b) En appliquant le théorème des barycentres partiels aux points A', B' et C', démontrer la relation de Céva :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$
2. Réciproquement, on suppose que les points A', B' et C' vérifient la relation précédente et que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point K.
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

[1]. *Céva Giovanni – 1648-1734.*