

1 Équations du second degré

1.1. Polynômes du second degré

Introduction

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants.

$$P(x) = (3 - 4x)(x + 2) \quad ; \quad Q(x) = (x - 1)^2 - 25 \quad ; \quad R(x) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right].$$

Définition

x est une variable réelle.

Un polynôme de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est appelé polynôme du second degré.

Vocabulaire

Le coefficient du terme de degré 2 est a ;

le coefficient du terme de degré 1 est b ;

le coefficient du terme de degré 0 est c .

Exemples

	$P(y) = 3y^2 - 10$	$Q(t) = t^2 - 4t + 7$	$R(u) = -u^2 + 5u$
a	3	1	-1
b	0	-4	5
c	-10	7	0

Forme canonique d'un polynôme du second degré

On donne le polynôme : $P(x) = 3x^2 - 6x + 24$.

- Vérifier l'égalité : $P(x) = 3[(x - 1)^2 + 7]$.
- Compléter les différentes étapes du calcul menant à ce résultat :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 24 &= 3[x^2 - 2x + 8] \\ &= 3[(x - 1)^2 + 8] \\ &= 3[(x - 1)^2 + 7]. \end{aligned}$$

Vocabulaire

Tout polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a[(x + p)^2 + q], \quad (a \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}).$$

On dit qu'on a écrit $P(x)$ sous forme canonique.

Exemples

- Écrire le polynôme $P(x) = -2x^2 + 5x + 3$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(x) &= -2\left[x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right] \\ &= -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right] \\ &= -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \end{aligned}$$

- À l'aide de la méthode utilisée précédemment, vérifier que les polynômes suivants ont pour forme canonique les expressions indiquées.

6 Problèmes du second degré

Polynôme	$Q(x) = x^2 + 4x + 5$	$S(x) = 2x^2 + 12x + 10$	$T(x) = 4x^2 - 8x + 1$
Forme canonique	$(x + 2)^2 + 1$	$2[(x + 3)^2 - 4]$	$4[(x - 1)^2 - \frac{3}{4}]$

M

Pour écrire un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) sous forme canonique, on peut également utiliser la formule suivante que nous admettons :

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le nombre Δ est appelé **discriminant** de $P(x)$.

Exemple

On donne le polynôme : $P(x) = -2x^2 + 8x + 6$.

Écrire $P(x)$ sous forme canonique.

On a : $a = -2$, $b = 8$ et $c = 6$.

Donc : $\frac{b}{2a} = -2$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times (-2) \times 6 = 112 ;$$

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{112}{4 \times (-2)^2} = 7.$$

On en déduit que : $P(x) = -2[(x - 2)^2 - 7]$.

Racines d'un polynôme du second degré

Compléter le tableau suivant.

Polynôme	$x^2 - 5x + 10$	$9x^2 - 6x + 1$	$2x^2 + 5x - 12$
Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = -15$		
Forme canonique			$2[(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{121}{16}]$
Forme factorisée	On ne peut pas factoriser		
Racines		Une racine : $\alpha = \frac{1}{3}$	

Cette activité suggère qu'il y a un lien entre le discriminant d'un polynôme du second degré et ses racines. Le point méthode suivant précise ce lien.

M

Pour déterminer les racines d'un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- utiliser le tableau ci-dessous.

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines	$P(x)$ n'a pas de racine	$P(x)$ a une racine : $\alpha = -\frac{b}{2a}$	$P(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarques

- Si les coefficients a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$; donc $P(x)$ a deux racines.
- Lorsque $\Delta = 0$, on obtient une seule racine : $-\frac{b}{2a}$.

Utilisation des racines pour factoriser un polynôme

M

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Pour écrire $P(x)$ comme un produit de facteurs du premier degré, on peut utiliser le tableau suivant.

Racines	$P(x)$ n'a pas de racine	$P(x)$ a une racine : α	$P(x)$ a deux racines : x_1 et x_2
Factorisation	On ne peut pas factoriser $P(x)$	$P(x) = a(x - \alpha)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemples

Factoriser, si possible, les polynômes suivants.

$$P(x) = x^2 - x + 1 ; \quad Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 ; \quad R(x) = 2x^2 + x - 3.$$

• $P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$.
On a : $\Delta < 0$; donc, $P(x)$ n'a pas de racine ; on ne peut pas factoriser $P(x)$.

• $Q(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-8) \times (-\frac{1}{2}) = 0$.
Donc, $Q(x)$ a une racine : 4 ; $Q(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2$.

• $R(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$.
On a : $\Delta > 0$; donc, $R(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$;
 $R(x) = 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) = (2x + 3)(x - 1)$.

Résolution d'une équation du second degré

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Toute équation du type $P(x) = 0$ est appelée **équation du second degré**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une telle équation revient à déterminer les racines du polynôme $P(x)$.

Le discriminant du polynôme $P(x)$ est aussi appelé **discriminant de l'équation** $P(x) = 0$.

La méthode suivante se déduit de la méthode de détermination des racines d'un polynôme du second degré.

M

Pour résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- utiliser le tableau ci-dessous.

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions	(E) n'a pas de solution	(E) a une solution : $\alpha = -\frac{b}{2a}$	(E) a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes.

$$(E_1) : 4x^2 - x + 1 = 0 ;$$

$$(E_2) : (\sqrt{2} + 1)x^2 - 2x + \sqrt{2} - 1 = 0 ;$$

$$(E_3) : 3x^2 + 11x - 20 = 0.$$

Résolution de (E_1)

$$\text{On a : } \Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 1 = -15.$$

L'équation (E_1) n'a pas de solution.

Résolution de (E_2)

$$\text{On a : } \Delta = (-2)^2 - 4(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 0.$$

$$\text{L'équation } (E_2) \text{ a une solution : } \alpha = \frac{2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1.$$

Résolution de (E_3)

$$\text{On a : } \Delta = 11^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 361 = 19^2.$$

L'équation (E_3) a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-11 - 19}{6} = \frac{-30}{6} = -5 ; \quad x_2 = \frac{-11 + 19}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

1.2. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

■ ■ ■ Détermination de la somme et du produit des solutions

Considérons l'équation du second degré $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Si son discriminant Δ est positif, alors (E) a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\text{On a : } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} ;$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{c}{a}.$$

On a démontré la propriété suivante.

Propriété

Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 ,

$$\text{alors } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple

Considérons l'équation du second degré : $2x^2 - 9x + 6 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 33$.

L'équation a deux solutions x_1 et x_2 .

$$\text{On a : } x_1 + x_2 = \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Remarques

• Le signe de la somme et du produit des solutions d'une équation du second degré permet, sans les calculer, de déterminer le signe de ces solutions.

Ainsi, dans l'exemple précédent, l'équation a deux solutions positives.

• Lorsque les coefficients a et c sont de signes contraires, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions de signes contraires.

■ ■ ■ ■ ■ Détermination de deux nombres dont on connaît la somme et le produit

1. Déterminer, lorsqu'ils existent, deux nombres ayant pour somme 2 et pour produit 4.

Solution

Désignons par x et y ces deux nombres.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x(2 - x) = 4. \end{cases}$$

$$x(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Donc, si x et y existent, ils sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 - 2x + 4 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$.

On a : $\Delta < 0$; donc l'équation n'a pas de solution.

On ne peut pas trouver deux nombres ayant pour somme 2 et pour produit 4.

2. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 70 m et l'aire 300 m².

Solution

Désignons par x et y les dimensions du rectangle.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 - x \\ x(35 - x) = 300. \end{cases}$$

$$x(35 - x) = 300 \Leftrightarrow x^2 - 35x + 300 = 0.$$

Donc, si x et y existent, ils sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 - 35x + 300 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-35)^2 - 4 \times 1 \times 300 = 25$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{35 - 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$;

$$x_2 = \frac{35 + 5}{2} = 20.$$

Le rectangle a pour largeur 15 m et pour longueur 20 m.

■ ■ ■ ■ ■ Utilisation de la somme et du produit des solutions

1. On considère l'équation (E) : $4x^2 + 17x - 15 = 0$.

a) Justifier que -5 est solution de (E).

b) En déduire l'autre solution, en utilisant la somme (ou le produit) des solutions.

Solution

a) On a : $4(-5)^2 + 17(-5) - 15 = 0$; donc -5 est solution de (E).

b) Désignons par x l'autre solution de (E).

• La somme des solutions est $-\frac{17}{4}$, c'est-à-dire : $x - 5 = -\frac{17}{4}$; donc : $x = -\frac{17}{4} + 5 = \frac{3}{4}$.

• On aurait pu utiliser le produit : $-5x = \frac{-15}{4}$; donc : $x = \frac{3}{4}$.

2. On considère l'équation (E) : $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$.

a) Justifier que (E) a deux solutions.

b) Déterminer la somme et le produit des solutions.

c) Déduire des questions précédentes les solutions de (E).

Solution

a) On a : $\Delta = (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{35} = 12 - 2\sqrt{35}$.

$\Delta > 0$; donc l'équation (E) a deux solutions.

b) Désignons par x et y ces deux solutions.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = \sqrt{5} + \sqrt{7} \\ xy = \sqrt{35} \end{cases}$$

c) $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ vérifient le système ; donc les solutions de (E) sont $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.

1.3. Travaux dirigés

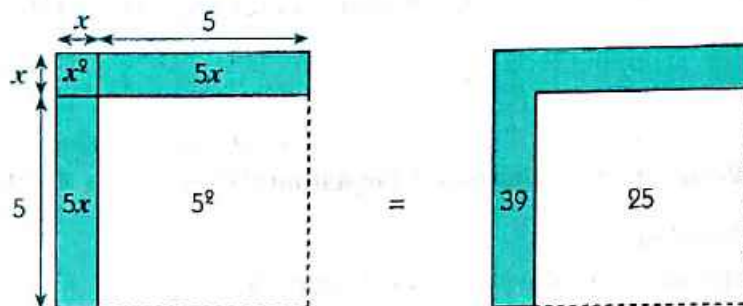
Résolution d'équations par la méthode d'Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi (788 – 850) est un mathématicien arabe de Bayt al-hikma, un institut de recherches scientifiques créé à Bagdad par le calife Al-Ma'moun (813 – 833), qui n'est autre que le fils de Haroun Al-Rachid, le célèbre personnage des « Mille et Une Nuits ».

La publication de son traité « L'Abrégé du calcul par al-jabr et al-muqabala » donne l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom (découlant du mot al-jabr), des objets, des outils, des preuves et des domaines d'application.

Nous allons présenter la méthode mise au point par Al-Khwarizmi pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$.

- On dessine un carré de côté x .
- On colle à ce carré deux rectangles de côtés x et 5, 5 étant la moitié de 10.
- On obtient ainsi un carré incomplet, mais incomplet d'une grandeur connue.



- On a donc :

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \times 5x + 5^2 &= 39 + 25 \\ (x + 5)^2 &= 64 \\ x + 5 &= 8 \quad \text{ou} \quad x + 5 = -8 \\ x &= 3 \quad \text{ou} \quad x = -13. \end{aligned}$$

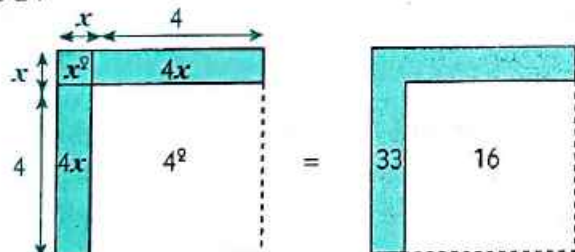
- En admettant la solution négative, on obtient :

Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.
(E₁) : $x^2 + 8x = 33$; (E₂) : $x^2 + 20x = 125$.

Solutions

Résolution de (E₁)

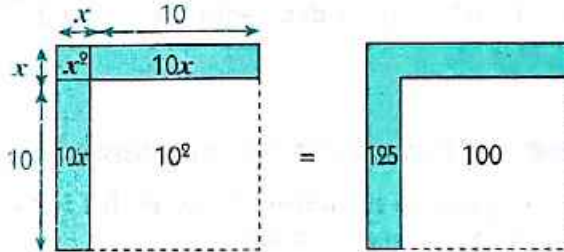
On a :



$$\begin{aligned} x^2 + 2 \times 4x + 4^2 &= 33 + 16 \\ (x + 4)^2 &= 49 \\ x + 4 &= 7 \quad \text{ou} \quad x + 4 = -7 \\ x &= 3 \quad \text{ou} \quad x = -11. \end{aligned}$$

Résolution de (E₂)

On a :



$$\begin{aligned} x^2 + 2 \times 10x + 10^2 &= 125 + 100 \\ (x + 10)^2 &= 225 \\ x + 10 &= 15 \quad \text{ou} \quad x + 10 = -15 \\ x &= 5 \quad \text{ou} \quad x = -25. \end{aligned}$$

Résolution d'équations par la méthode d'Al-Khayyâm

Encouragés par les résultats obtenus sur les équations du second degré, les mathématiciens de Grèce, de l'Inde et du monde arabe se lancèrent à l'assaut des équations du troisième degré, sans succès. Vint alors le poète persan Omar Al-Khayyâm (1048 – 1131) qui proposa une méthode graphique pour trouver une solution approchée dont, disait-il, « il est possible d'augmenter la précision jusqu'à ce que l'erreur soit imperceptible ». Cette méthode peut également servir à résoudre graphiquement des équations du second degré.

1. Soit à résoudre graphiquement l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$.

a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à : $x + 1 = \frac{1}{x}$.

b) Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :

- la droite (D) d'équation : $y = x + 1$;

- l'hyperbole (H) d'équation : $y = \frac{1}{x}$.

c) Dédurre de la question précédente des solutions approchées de (E).

Solution

a) L'équation (E) est équivalente à : $x(x+1) = 1$.

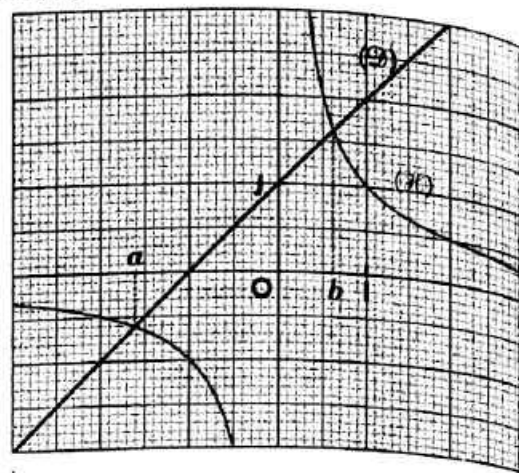
0 n'étant pas solution de (E), on a : $x+1 = \frac{1}{x}$.

b) Résoudre l'équation (E), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes (D) et (H) ci-contre.

(D) et (H) se coupent en deux points d'abscisses a et b telles que : $-2 < a < -1$ et $0 < b < 1$.

On a : $a \approx -1,6$ et $b \approx 0,6$.

Les nombres $-1,6$ et $0,6$ sont des solutions approchées de l'équation (E).



2. Résoudre graphiquement l'équation (H) : $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Solution

L'équation (H) est équivalente à : $x(x-3) = -2$.

0 n'étant pas solution de (H), on a : $x-3 = \frac{-2}{x}$.

Soit (D') la droite d'équation : $y = x - 3$;

et (H') l'hyperbole d'équation : $y = \frac{-2}{x}$.

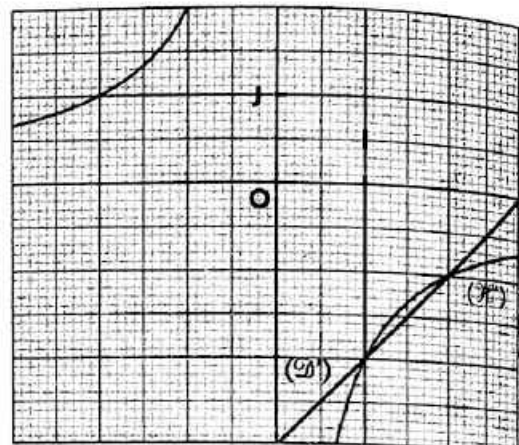
Résoudre l'équation (H), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes (D') et (H') ci-contre.

(D') et (H') se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique, 1 et 2.

On vérifie que : $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$;

$$2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0.$$

Donc, l'équation (H) a deux solutions : 1 et 2.



Équations du troisième degré

On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^3 - 7x - 6 = 0$.

On va utiliser deux méthodes.

1. Utilisation d'une solution « évidente »

a) Vérifier que -1 est solution de (E).

b) Vérifier que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6)$.

c) Résoudre alors l'équation (E).

Solution

a) On a : $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$; donc -1 est solution de (E).

b) On a : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $(x+1)(x^2 - x - 6) = x^3 - x^2 - 6x + x^2 - x - 6 = x^3 - 7x - 6$.

c) L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ a pour solutions : -2 et 3 .

Donc, (E) a pour solutions : -1 , -2 et 3 .

2. Utilisation de la méthode d'Al-Khayyâm

a) Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :

- la parabole (P) d'équation : $y = x^2 - 7$;

- l'hyperbole (H) d'équation : $y = \frac{6}{x}$.

b) Résoudre graphiquement l'équation (E).

Solution

a) $(\mathcal{P}) : y = x^2 - 7$.

Table de valeurs

x	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
y	5,25	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	5,25

$(\mathcal{H}) : y = \frac{6}{x}$.

Table de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1,5	2	-3	-6		6	3	2	1,5

b) L'équation (E) est équivalente à : $x^2 - 7 = \frac{6}{x}$.

Résoudre l'équation (E), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{H})$ ci-contre.

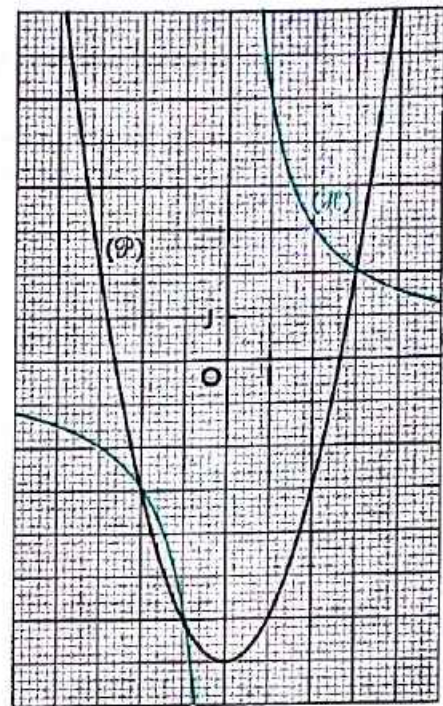
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{H})$ se coupent en trois points qui ont pour abscisses, par lecture graphique : -2, -1 et 3.

On vérifie que : $(-2)^3 - 7 \times (-2) - 6 = 0$;

$(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = 0$;

$3^3 - 7 \times 3 - 6 = 0$.

Donc, l'équation (E) a trois solutions : -2, -1 et 3.



Équations bicarrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

Cette équation du quatrième degré, sans terme de degré impair, est appelée équation bicarrée.

Pour résoudre une telle équation, on peut effectuer le changement d'inconnue : $X = x^2$.

On doit alors résoudre l'équation du second degré : $X^2 + 2X - 3 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

L'équation a deux solutions : $X_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$;

$X_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$.

L'équation $x^2 = -3$ n'a pas de solution.

L'équation $x^2 = 1$ a deux solutions : -1 et 1.

Donc, l'équation $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ a deux solutions : -1 et 1.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, écrire le polynôme $P(x)$ sous forme canonique.

a) $P(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $P(x) = 2x^2 + 4x + 5$

c) $P(x) = x^2 - 4x - 5$

d) $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

1.b Dans chacun des cas suivants, vérifier que le nombre α est racine de $P(x)$ et déterminer l'autre racine.

a) $P(x) = x^2 - x - 6$; $\alpha = -2$

b) $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $\alpha = 1$

c) $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $\alpha = -\frac{1}{2}$

d) $P(x) = -x^2 + 3x + 4$; $\alpha = -1$.

1.c Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

a) $x^2 + x + 1 = 0$

b) $2x^2 - x - 3 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

1.d Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres réels dont la somme est S et le produit P .

a) $S = -1$ et $P = -6$

b) $S = -\frac{3}{2}$ et $P = -10$

c) $S = 7$ et $P = 12$

d) $S = 2$ et $P = -15$.

Exercices

1.e Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.

a) $x^2 + 12x = 108$ b) $x^2 + 14x - 176 = 0$.

1.f Soit l'équation (E) : $x^3 + 2x - 3 = 0$.
a) Vérifier que 1 est solution de (E).

b) Vérifier l'égalité : $x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$.
c) Résoudre alors (E).

1.g Par la méthode d'Al-Khayyâm, résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 + 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - x - 6 = 0$
c) $x^2 - 4x + 1 = 0$ d) $2x^2 - x - 3 = 0$.

2 Inéquations du second degré

2.1. Résolution d'une inéquation du second degré

Signe d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de $P(x)$ est le nombre réel : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a : $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

L'expression de la forme canonique montre que l'étude du signe d'un polynôme du second degré dépend du signe de son discriminant.

Examinons quelques cas.

a) **Le discriminant est négatif.**

On considère le polynôme : $P(x) = -x^2 + 3x - 5$.

- Calculer le discriminant de $P(x)$.
- Écrire $P(x)$ sous forme canonique.
- Justifier que : pour tout nombre réel x , $P(x) < 0$.

b) **Le discriminant est nul.**

On considère le polynôme : $Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$.

- Calculer le discriminant de $Q(x)$.
- Justifier que : pour tout nombre réel x , $Q(x) = 4 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2$.
- Étudier le signe de $Q(x)$.

c) **Le discriminant est positif.**

On considère le polynôme : $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

- Calculer le discriminant de $S(x)$.
- Justifier que : pour tout nombre réel x , $S(x) = 2(x + 3) \left(x - \frac{1}{2} \right)$.
- Étudier le signe de $S(x)$.

Plus généralement, on peut étudier le signe d'un polynôme du second degré à l'aide de la méthode suivante.

M

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant Δ et utiliser l'un des tableaux ci-dessous.

$\Delta < 0$ $P(x)$ n'a pas de racine		
x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

$\Delta = 0$ $P(x)$ a une racine $-\frac{b}{2a}$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

$\Delta > 0$ $P(x)$ a deux racines x_1 et x_2				
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0
				signe de a

Exemples

Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe des polynômes ci-dessous :

$$P(x) = x^2 - x + 3 \quad ; \quad Q(x) = -9x^2 + 6x - 1 \quad \text{et} \quad S(x) = -x^2 + x + 2.$$

• Signe de $P(x)$

$$\text{On a : } \Delta = -11.$$

Donc : $P(x)$ n'a pas de racine ;
pour tout nombre réel x , $P(x) > 0$.

• Signe de $Q(x)$

$$\text{On a : } \Delta = 0.$$

Donc : $Q(x)$ a une racine : $\frac{1}{3}$;
pour tout nombre réel x , distinct de $\frac{1}{3}$, $Q(x) < 0$.

• Signe de $S(x)$

$$\text{On a : } \Delta = 9.$$

Donc : $S(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$;

pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$, $S(x) < 0$;

pour tout $x \in]-1 ; 2[$, $S(x) > 0$.

■■■■■ Exemples de résolution d'inéquations du second degré

Soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Toute inéquation de l'un des types suivants est appelée inéquation du second degré :

$$P(x) > 0 ; \quad P(x) \geq 0 ; \quad P(x) < 0 ; \quad P(x) \leq 0.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une telle inéquation revient à étudier le signe du polynôme $P(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - x + 3 \leq 0$.

Solution

$$\text{Posons : } P(x) = x^2 - x + 3.$$

$$P(x) \text{ a pour discriminant : } \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11.$$

Δ est négatif et le coefficient de x^2 est positif ; donc, pour tout nombre réel x , on a : $P(x) > 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\emptyset$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 > 0$.

Solution

$$\text{Posons : } P(x) = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2.$$

$$P(x) \text{ a pour discriminant : } \Delta = (-6\sqrt{2})^2 - 4 \times 9 \times 2 = 0.$$

$$\text{Donc : } P(x) \text{ a une racine } \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3} ;$$

$$\text{pour tout nombre réel } x, P(x) = 9\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 ;$$

$$\text{pour tout nombre réel } x, \text{ différent de } \frac{\sqrt{2}}{3}, P(x) > 0.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\mathbb{R} - \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + x + 3 < 0$.

Solution

$$\text{Posons : } P(x) = -2x^2 + x + 3.$$

$$P(x) \text{ a pour discriminant : } \Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25.$$

$$\text{Donc : } P(x) \text{ a deux racines } x_1 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+5}{-4} = -1.$$

Le signe de $P(x)$ est donné par le tableau ci-contre.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[.$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2.2. Travaux dirigés

Résolution graphique d'une inéquation du second degré

Dans le plan muni du repère (O, I, J) , construire :

- la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$;
- la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 3x - 2$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Solution

L'inéquation (I) est équivalente à : $x^2 > 3x - 2$.

Résoudre (I), c'est déterminer les abscisses des points de $(\mathcal{P})$ situés au-dessus de $(\mathcal{D})$.

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique : 1 et 2.

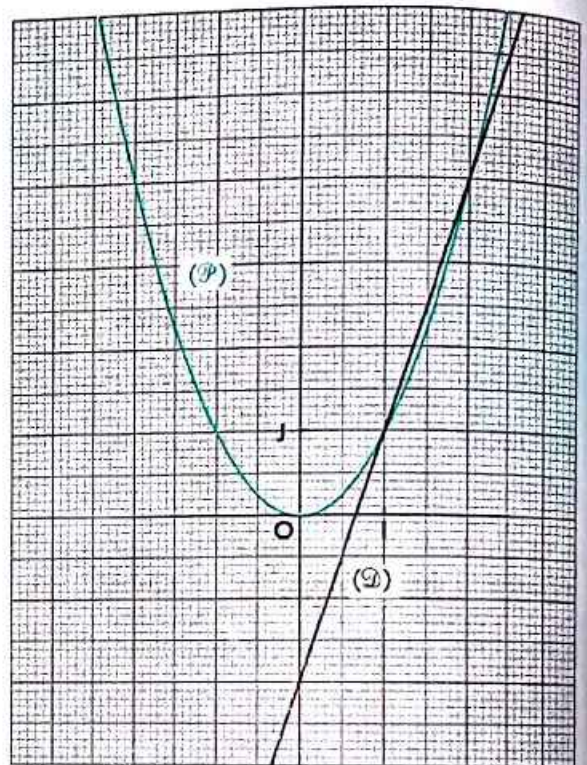
On a : $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$;

$$2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0.$$

Donc, 1 et 2 sont solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[.$$



Inéquations bicarrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-x^4 + 2x^2 + 3 \geq 0$.

Solution

Posons : $P(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ et $X = x^2$.

On a : $P(x) = -X^2 + 2X + 3$

$$= (X + 1)(3 - X)$$

$$= (x^2 + 1)(3 - x^2)$$

$$= (x^2 + 1)(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x).$$

On a : pour tout nombre réel x , $x^2 + 1 > 0$; donc, $P(x)$ est du signe de $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$.

Le tableau ci-contre donne le signe de $P(x)$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$[-\sqrt{3}; \sqrt{3}].$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercices

2.a Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe du polynôme du second degré $P(x)$.

a) $P(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = 3x^2 - 10x + 8$

c) $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$

d) $P(x) = x^2 - x + 4$.

2.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations du second degré suivantes.

a) $9 - x^2 \geq 0$

b) $2x^2 - x - 3 > 0$

c) $-x^2 + x - 5 < 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

2.c Dans le plan muni du repère (O, I, J) , construire :

- la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$;
- la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x^2 \geq 2x$.

2.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^4 + x^2 - 6 \leq 0$.

3 Résolution de problèmes

3.1. Problèmes conduisant à une équation du second degré

Problèmes d'optimisation

1. De tous les rectangles d'aire 100 m^2 , quel est celui qui a le plus petit périmètre ?

Solution

Désignons par x et y les dimensions du rectangle, et par p son périmètre.

On a : $\begin{cases} xy = 100 \\ p = 2(x + y) \end{cases}$; donc : $\begin{cases} y = \frac{p}{2} - x \\ x(\frac{p}{2} - x) = 100 \end{cases}$.

L'équation $x(\frac{p}{2} - x) = 100$ est équivalente à l'équation (E) : $x^2 - \frac{p}{2}x + 100 = 0$.

L'équation (E) a pour discriminant : $\Delta = \frac{p^2}{4} - 400 = (\frac{p}{2} - 20)(\frac{p}{2} + 20)$.

(E) a des solutions si $\Delta \geq 0$; c'est-à-dire : $p \geq 40$.

La plus petite valeur possible de p est atteinte lorsque $p = 40$; c'est-à-dire : $\Delta = 0$.

L'équation (E) a alors une solution : $x = y = 10$.

Donc, le rectangle de périmètre minimal est un carré.

Plus généralement :

de tous les rectangles ayant une aire donnée, celui qui a le plus petit périmètre est le carré ;
de tous les rectangles ayant un périmètre donné, celui qui a la plus grande aire est le carré.

2. Une société de vente de livres par correspondance a actuellement dix mille abonnés qui payent chacun cinq mille francs CFA par mois. Une étude a révélé qu'une variation de cent francs CFA du prix de l'abonnement mensuel ferait varier le nombre d'abonnés d'une centaine.

Comment faut-il modifier le prix de l'abonnement mensuel pour obtenir le maximum de revenu ?

Solution

Remarquons qu'une augmentation du prix d'abonnement fait diminuer le nombre d'abonnés et qu'une diminution du prix de l'abonnement le fait augmenter.

Désignons par n la variation du prix en francs CFA.

Le nouveau prix, en francs CFA, est : $5\,000 + n$.

Le nombre d'abonnés est alors : $10\,000 - n$.

Si n est négatif, il s'agit d'une diminution de prix et d'une augmentation du nombre d'abonnés.
 Si n est positif, il s'agit d'une augmentation de prix et d'une diminution du nombre d'abonnés.
 Le revenu mensuel est donc : $R = (5\,000 + n)(10\,000 - n)$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } R &= -n^2 + 5\,000n + 50\,000\,000 \\ &= -[(n - 2\,500)^2 - 56\,250\,000] \\ &= 56\,250\,000 - (n - 2\,500)^2.\end{aligned}$$

On a : pour tout nombre entier n , $(n - 2\,500)^2 \geq 0$; donc : $R \leq 56\,250\,000$.

La plus grande valeur de R est atteinte lorsque : $R = 56\,250\,000$;

$$\begin{aligned}\text{c'est-à-dire : } 56\,250\,000 - (n - 2\,500)^2 &= 56\,250\,000 ; \\ (n - 2\,500)^2 &= 0 ; \\ n &= 2\,500.\end{aligned}$$

L'augmentation est de 2 500 F CFA.

Donc, le nouvel abonnement mensuel est de 7 500 F CFA.

■ ■ ■ ■ ■ Au marché

Madame Ouattara a acheté un certain nombre de pièces de tissu pour 43 200 F CFA. Si, pour la même somme, elle avait eu 2 pièces de moins, la pièce lui aurait coûté 300 F CFA de plus.

Déterminer le nombre de pièces achetées et le prix d'une pièce.

Solution

Désignons par : x le nombre de pièces ;
 y le prix d'une pièce.

x et y sont des entiers positifs vérifiant le système :
$$\begin{cases} xy = 43\,200 \\ (x - 2)(y + 300) = 43\,200 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} xy = 43\,200 \\ 300x - 2y - 600 = 0 \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} y = \frac{43\,200}{x} & (1) \\ 300x - \frac{86\,400}{x} - 600 = 0 & (2). \end{cases}$$

L'équation (2) est équivalente à : $x^2 - 2x - 288 = 0$.

On a : $\Delta = 1\,156 = 34^2$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{2 - 34}{2} = -16$;

$$x_2 = \frac{2 + 34}{2} = 18.$$

x étant positif, la solution acceptable est 18.

On en déduit que : $y = \frac{43\,200}{18} = 2\,400$.

Le nombre de pièces achetées est de 18 ; le prix d'une pièce est de 2 400 F CFA.

■ ■ ■ ■ ■ Un problème de bateau

Un bateau descend une rivière sur un parcours de 30 km, puis la remonte sur 12 km. Le voyage dure 4 heures. La vitesse du courant est de 2,5 km/h.

Quelle est la vitesse propre de ce bateau ?

Solution

Désignons par v la vitesse, en km/h, du bateau.

La vitesse du bateau à la descente est : $v + 2,5$.

La vitesse du bateau à la remontée est : $v - 2,5$.

L'énoncé nous dit que le voyage dure 4 heures ; donc nous allons raisonner sur la durée.

Le temps mis pour descendre la rivière est : $t_1 = \frac{30}{v + 2,5}$.

Le temps mis pour remonter la rivière est : $t_2 = \frac{12}{v - 2,5}$.

On a : $t_1 + t_2 = 4$; c'est-à-dire : $\frac{30}{v + 2,5} + \frac{12}{v - 2,5} = 4$.

On en déduit l'équation du second degré : $2v^2 - 21v + 10 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = 441 - 80 = 361 = 19^2$.

Cette équation admet deux solutions : $v_1 = \frac{21 - 19}{4} = 0,5$ et $v_2 = \frac{21 + 19}{4} = 10$.

La première solution est inacceptable puisque le bateau ne pourrait pas remonter le courant.
Donc, la vitesse du bateau est de 10 km/h.

■■■■■ Excursion à Bafoussam

Les élèves d'un lycée de Bafoussam organisent une excursion.

Pour cela, ils louent un car à 120 000 F CFA. Au moment du départ, 4 nouveaux élèves s'ajoutent et chacun des partants doit alors payer 1 000 F CFA de moins.

Déterminer le nombre d'élèves qui participent à l'excursion et la somme que chacun doit payer.

Solution

Désignons par : x le nombre initial de participants à l'excursion ;

y la somme que chaque participant devait payer initialement.

La somme totale à payer est : $xy = 120\ 000$.

Avec l'arrivée des 4 derniers élèves, le nombre de participants à l'excursion devient : $x + 4$;
chaque participant doit alors payer : $y - 1\ 000$.

La somme totale à payer est : $(x + 4)(y - 1\ 000) = 120\ 000$.

On obtient le système :
$$\begin{cases} xy = 120\ 000 \\ (x + 4)(y - 1\ 000) = 120\ 000 \end{cases}$$

c'est-à-dire :
$$\begin{cases} xy = 120\ 000 \\ -1\ 000x + 4y - 4\ 000 = 0 \end{cases}$$

ou :
$$\begin{cases} y = \frac{120\ 000}{x} & (1) \\ 1\ 000x - \frac{480\ 000}{x} + 4\ 000 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est équivalente à : $x^2 + 4x - 480 = 0$.

On a : $\Delta = 1\ 936 = 44^2$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-4 - 44}{2} = -24$;

$$x_2 = \frac{-4 + 44}{2} = 20.$$

x désignant le nombre d'élèves, la solution acceptable est 20.

On en déduit que : $y = \frac{120\ 000}{20} = 6\ 000$ F CFA.

Donc, au départ 20 élèves se sont inscrits pour l'excursion et chacun devait payer 6 000 F CFA.

Avec l'arrivée des 4 derniers élèves, l'excursion compte finalement 24 participants et chacun doit payer 5 000 F CFA.

3.2 Problèmes conduisant à une inéquation du second degré

■■■■■ Production d'une entreprise

Une PME (Petite et Moyenne Entreprise) fabrique chaque jour S serpilières et T torchons. La courbe de production journalière de cette entreprise est donnée par : $S^2 + 10S + 25T \leq 4\ 000$.

1°) Déterminer le nombre maximal de serpillières que cette entreprise produit en une journée où elle fabrique 40 torchons, puis 80 torchons.

2°) Cette entreprise peut-elle produire 200 torchons par jour ?

Solution

1°) • Pour $T = 40$, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S - 3\,000 \leq 0$
ou : $(S + 60)(S - 50) \leq 0$.

Or : $S + 60 > 0$; donc : $S \leq 50$.

La valeur maximale de S est 50.

• Pour $T = 80$, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S - 2\,000 \leq 0$
ou : $(S + 50)(S - 40) \leq 0$.

Or : $S + 50 > 0$; donc : $S \leq 40$.

La valeur maximale de S est 40.

2°) Pour $T = 200$, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S + 1\,000 \leq 0$.

L'équation $S^2 + 10S + 1\,000 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 10^2 - 4 \times 1\,000 = -3\,900$.

Δ étant négatif, on a : $S^2 + 10S + 1\,000 > 0$; l'inéquation n'a pas de solution.

Donc, cette entreprise ne peut pas produire 200 torchons par jour.

■ ■ ■ ■ ■ Au spectacle

Un promoteur de spectacles veut organiser un festival de reggae dans un stade de football pouvant contenir 20 000 personnes. Il a constaté que le nombre de spectateurs x est fonction du prix p du ticket d'entrée, suivant la relation : $x = -8p + 20\,000$.

Les charges fixes (location du stade, cachet des musiciens et divers) s'élèvent à 8 000 000 de F CFA.

1°) Démontrer que, pour amortir les dépenses, le prix p du ticket doit vérifier l'inéquation :

$$-8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000 \geq 0.$$

2°) Déterminer alors le prix du ticket pour avoir le maximum de spectateurs.

Solution

1°) Le nombre de spectateurs étant positif, on a : $-8p + 20\,000 \geq 0$; c'est-à-dire : $p \leq 2\,500$.

La recette totale est : px .

Donc, le revenu du promoteur est : $R = px - 8\,000\,000$
 $= -8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000$.

Pour amortir les dépenses, il faut : $-8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000 \geq 0$.

2°) On a : $R = -8(p^2 - 2\,500p + 1\,000\,000)$

$$= -8(p - 500)(p - 2\,000).$$

Le signe de R est donné par le tableau suivant.

p	0	500	2 000	2 500
x	20 000	16 000	2 000	0
R	-	0	+	0

Le promoteur perd en vendant les tickets à moins de 500 F CFA ou à plus de 2 000 F CFA.

Pour réaliser des bénéfices, le prix doit être compris entre 500 F CFA et 2 000 F CFA.

Pour avoir le maximum de spectateurs, le prix doit être le plus bas possible, c'est-à-dire 500 F CFA.

Il y aura alors 16 000 spectateurs.

Exercices

APPRENTISSAGE

Équations du second degré

X 1 Dans chacun des cas suivants, écrire le polynôme du second degré $P(x)$ sous forme canonique.

- a) $P(x) = x^2 - 2x + 5$ b) $P(x) = x^2 + 10x + 16$
c) $P(x) = 4x^2 - 12x - 7$ d) $P(x) = -3x^2 + 12x + 8$.

X 2 Dans chacun des cas suivants, vérifier que le nombre α est une racine de $P(x)$. Factoriser alors $P(x)$ et en déduire l'autre racine.

- a) $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$; $\alpha = 1$
b) $P(x) = 3x^2 - x - 4$; $\alpha = -1$
c) $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$; $\alpha = \frac{1}{2}$.

3 Donner la forme générale des polynômes du second degré ayant pour racines -1 et 2 .

4 Déterminer le polynôme du second degré $P(x)$ ayant pour racines -3 et 2 , tel que : $P(0) = 4$.

5 Déterminer la forme générale des polynômes du second degré admettant 1 pour seule racine. Préciser celui qui prend la valeur -2 en 0 .

6 Dans chacun des cas suivants, factoriser, si possible, le polynôme du second degré $P(x)$.

- a) $P(x) = x^2 + 6x - 7$ b) $P(x) = x^2 - 8x + 17$
c) $P(x) = -2x^2 + 4x + 6$ d) $P(x) = -9x^2 + 6x - 1$.

7 Dans chacun des cas suivants, vérifier que α est solution de (E). Trouver l'autre solution.

- a) (E) : $7x^2 - 4x - 11 = 0$; $\alpha = -1$
b) (E) : $2x^2 - 3x - 2 = 0$; $\alpha = 2$
c) (E) : $5x^2 - x - 4 = 0$; $\alpha = 1$.

X 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ b) $-4x^2 + 10x - 6 = 0$
c) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ d) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$
e) $5x^2 - 7x - 6 = 0$ f) $4x^2 - x + 3 = 0$.

9 Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.

- a) $x^2 + 4x = 45$ b) $x^2 + 6x = 16$.

10 Déterminer, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est S et le produit P .

- a) $S = 3$ et $P = -10$ b) $S = 5$ et $P = 6$
c) $S = -3$ et $P = 9$ d) $S = -6$ et $P = 9$.

X 11 1. On considère l'équation (E) :
 $x^2 - 2\,000x + 1\,000 = 0$.

a) Justifier que (E) admet deux solutions.

b) Déterminer la somme et le produit de ces deux solutions. (On ne demande pas de déterminer les solutions.)

c) Déterminer le signe des solutions.

2. Démontrer que l'équation $x^2 + 2\,000x + 1\,000 = 0$ a deux solutions négatives.

X 12 On considère l'équation (E) :

$$x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0.$$

1. Justifier que (E) a deux solutions de signes contraires.

2. Déterminer la somme et le produit des solutions.

3. Dédire des questions précédentes les solutions de (E).

X 13 On considère l'équation (E) :

$$x^2 - 9x - 90 = 0.$$

1. Justifier que -6 est solution de (E).

2. Dédire l'autre solution en utilisant le produit (ou la somme) des solutions.

X 14 On considère l'équation (E) :

$$12x^2 - 13x - 25 = 0.$$

1. Justifier que -1 est solution de (E).

2. Dédire l'autre solution en utilisant le produit (ou la somme) des solutions.

Inéquations du second degré

X 15 Étudier, suivant les valeurs de x , le signe du polynôme $P(x)$.

- a) $P(x) = 4x^2 - x + 1$ b) $P(x) = -2x^2 + 7x - 3$
c) $P(x) = -9x^2 + 6x - 1$ d) $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

X 16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a) $4 - 9x^2 \leq 0$ b) $-x^2 - x + 12 \geq 0$
c) $2x^2 - x - 3 > 0$ d) $8x^2 + 34x + 21 < 0$
e) $-3x^2 + 4x - 2 < 0$ f) $-9x^2 + 12x - 4 > 0$.

X 17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a) $x \geq 4x^2$ b) $3x^2 > x - 5$
c) $(2x - 3)^2 > (3x + 4)^2$
d) $(x^2 + x + 1)^2 < (x^2 - x + 1)^2$.

X 18 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

1. Construire sur le même graphique :

- la parabole (P) d'équation : $y = 2x^2$;
- la droite (D) d'équation : $y = -x + 3$.

2. a) Étudier graphiquement la position relative des courbes (P) et (D).

b) Vérifier par le calcul.

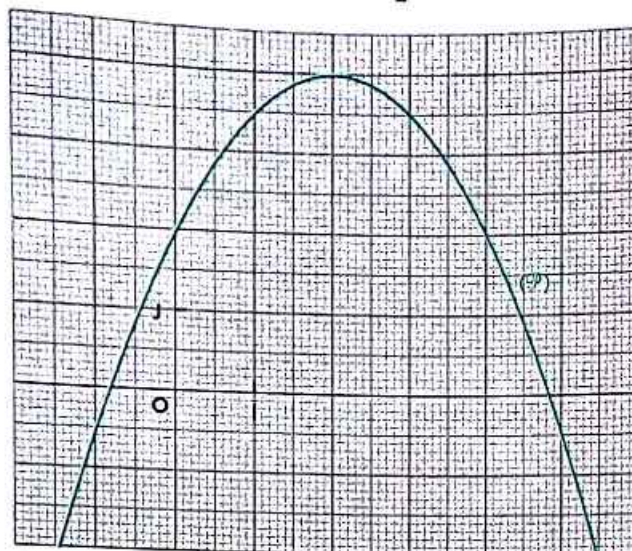
X 19 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

(P) est la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.

1. Vérifier que (P) passe par les points
A($2 - 2\sqrt{2}$; 0), B(0 ; 2), S(2 ; 4), C(4 ; 2)
et D($2 + 2\sqrt{2}$; 0).

2. Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \geq 0$ b) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x < 0$.



Résolution de problèmes

20 Bintou a acheté un certain nombre d'actions d'une banque A pour 600 000 F CFA. Pour la même somme, elle aurait pu acheter, d'une autre banque B, 100 actions de moins à 3 000 F CFA de plus par action. Déterminer le nombre d'actions que Bintou a achetées de la banque A et la valeur d'une action.

21 Combien a-t-on acheté de mètres de tissu pour 10 800 F CFA, sachant que, si le mètre coûtait 100 F CFA de moins, on aurait 9 mètres de tissu en plus ?

22 Deux automobilistes parcourent un même trajet de 400 km. L'un le fait à 20 km/h de plus que l'autre et en une heure de moins. Déterminer, pour chacun des automobilistes, la vitesse et le temps nécessaires pour parcourir le trajet.

23 Yannick bénéficie habituellement d'une remise de x %. Un jour de solde, on lui accorde une réduction supplémentaire de y %. Déterminer x et y , sachant que la somme de ces deux remises est de 10 % et que Yannick a payé 90 160 F CFA un article étiqueté 100 000 F CFA. On sait que x est inférieur à y .

24 Un cycliste parcourt un trajet de trois tronçons. Le premier tronçon est une montée de 15 km, le deuxième est une descente de 20 km et le troisième est une montée de 30 km. Le cycliste fait 10 km/h de moins en montée qu'en descente et il met 2 heures pour faire le trajet complet. Déterminer la vitesse du cycliste en montée et en descente.

25 On doit partager une somme de 30 000 F CFA entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacune serait augmentée de 1 250 F CFA. Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune d'elles.

26 Antoine place, à un taux inconnu, un capital de 2 000 000 F CFA. Après un an, il retire ce capital et les intérêts produits et place le tout à un taux supérieur de 2 % au premier taux. Un an après, il retire 147 000 F CFA d'intérêt. Déterminer le premier taux.

27 Deux associés ont retiré de la vente de leur entreprise 5 000 000 F CFA correspondant à leurs placements et aux bénéfices proportionnels à ces derniers. Le premier a retiré 600 000 F CFA de bénéfice. Le second, qui a un placement inférieur à celui du premier, avait mis 1 600 000 F CFA dans l'entreprise. Déterminer le placement du premier et le bénéfice du second.

28 Un commerçant doit acheter un lot de vestes. Le grossiste lui demande 800 000 F CFA pour le lot. Après négociations, le grossiste lui consent un rabais de 5 000 F CFA par veste. Il décide alors de prendre 4 vestes de plus et paie 840 000 F CFA. Déterminer le nombre de vestes achetées et le prix de chacune avant le rabais.

29 Un rectangle a pour dimensions 160 m et 120 m. De quelle longueur faut-il augmenter le plus grand côté et diminuer le plus petit pour réduire l'aire de moitié ?

APPROFONDISSEMENT

30 On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 7x + 6$.
1. Vérifier que 1 est racine de $P(x)$.
2. Écrire $P(x)$ comme produit de facteurs du premier degré.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

31 1. On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^3 - 2x - 3 = 0$.
a) Démontrer que (E) est équivalente à : $x^2 - 2 = \frac{3}{x}$.
b) Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :
- la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation : $y = x^2 - 2$;
- l'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation : $y = \frac{3}{x}$.
c) Dédire de la question précédente une solution approchée de l'équation (E).
2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 1 = 0$.

32 Patricia a placé 10 000 F CFA au taux annuel de 8 %, pendant un certain nombre de mois, puis a placé le capital et les intérêts acquis pendant la même durée au taux annuel de 12 %. Elle possède à la fin 12 650 F CFA. Déterminer la durée du premier placement.

33 Un paysan emprunte à la coopérative du village la somme de 500 000 F CFA à un certain taux d'intérêt annuel. À la fin de la première année, il rembourse la somme de 300 000 F CFA. Le taux d'intérêt de la seconde année est celui de l'année précédente majoré de 2 %. À la fin de la seconde année, le paysan rembourse 280 000 F CFA, éteignant ainsi sa dette. Quel est le taux d'intérêt de la première année ?