DIOCESE DE PORTO-NOVO
COLLEGE CATHOLIQUE
NOTRE DAME DE LOURDES
BP :900 ; TEL :20214056/20226329

ANNEE SCOLAIRE : 2024-2025
DEVOIR : Premier trimestre
CLASSE : T^{le} C
DUREE : 4heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Contexte :

Fausto, un particulier, possède un terrain carré de centre O et de sommets A, B, C et D tels que $AB = 6dam$. Il désire construire sur son terrain une maison moderne dont la toiture a une forme irrégulière. Il sollicite le service d'un architecte qui lui propose un plan sur lequel il énumère ci-dessous quelques dispositions pratiques.

- Domestiquer un animal de compagnie qui devra se déplacer suivant une direction précise E_m ; E_m étant l'ensemble des points G_m lorsque m décrit l'intervalle $[-1; 1]$ avec G_m le barycentre du système de points pondérés $\mathcal{S} = \{(A, m^2 + 1); (B, m); (C, -m)\}$;
- Placer une lampe multi couleurs de $4m$ dont le support est l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MD^2 = 24$.
- Aménager une portion délimiter par l'ensemble Σ des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 54$.
- Pour un premier essai de toiture, il désigne par I, J, K et S des points de l'espace tels que I et J appartiennent respectivement aux segments $]AB[$ et $[AD]$, $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AJ} \wedge \overrightarrow{AI}$, $AI = AJ = AK$, les triangles SAB et SAD étant rectangles et isocèles en A.
- Créer une séparation à l'aide de l'ensemble $(\mathcal{P})$ des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \left[\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MS} - 2\overrightarrow{MC}\right) \wedge \left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MC}\right)\right] = 0$.
- Procéder à un second essai de toiture et construire d'autres séparations à partir de ceux déjà créer par l'utilisation de symétrie.

Fausto qui a eu le temps d'oublier les différentes notions qui entre en jeu dans la construction de sa maison, se remet à l'éclairage de son fils élève en terminale C pour un suivi judicieux des travaux.

Tâche : Tu es invité(e) à jouer le rôle du fils de Fausto en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1 :

1. a) Justifie que pour tout nombre réel m , le système $\mathcal{S}$ admet un unique barycentre G_m.
   b) Détermine et construis les points G_1 et G_{-1}. Tu prendras $1dam$ pour $\frac{1}{2}cm$.
   c) Démontre que pour tout réel m de l'intervalle $[-1; 1]$,. G_m appartient à la droite (AD).
   d) Déduis-en l'ensemble des points G_m lorsque m décrit l'intervalle $[-1; 1]$.
2. Détermine et construis sur la même figure que G_1 et G_{-1} les ensembles Γ et Σ.
3. On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{AI}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{AJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AK}$.
   a) Démontre que $\mathcal{R} = \left(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
   b) Détermine dans $\mathcal{R}$ les coordonnées des différentes positions du point S.
4. a) Justifie l'existence d'une unique homothétie h qui transforme respectivement les points I et J aux points O et D.
   b) Détermine le volume de l'image par h de la pyramide $SABCD$ où S est le point dont la côte est positive.
5. Démontre que $(\mathcal{P})$ est un plan dont tu préciseras une équation cartésienne.

Problème 2 :

Pour obtenir l'autre essai de toiture, l'architecte prévoit de placer un point O de l'espace de façon à obtenir une pyramide $OABCD$ dont la base est un carré $ABCD$ de centre H tel que le point O soit équidistant des points A, B, C et D. Il devrait s'assurer de son choix pour l'équilibre du bâtiment principal.

6. Démontre que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
7. Démontre que les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux et sont des plans de symétrie de la pyramide $OABCD$.
8. On désigne respectivement par s_1 et s_2 les réflexions de plans (OAC) et (OBD). Donne la nature et l'élément caractéristique de l'application $s_1 o s_2$
9. Déduis-en que la droite (OH) est un axe de symétrie de la pyramide $OABCD$.
10. On considère les demi-tours respectifs d_1 et d_2 d'axes (AC) et (BD). Démontre que l'on a : $d_1 o d_2 = s_1 o s_2$.

Problème 3 :

Le terrain de Fausto se trouve dans un angle de rue. Pour y avoir accès, il faudra bien ralentir pour sereinement traverser une intersection. L'étude de l'intersection revête une importance particulière tant la densité de la population et la signalisation sont difficiles à aborder.

L'espace orienté étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, l'intersection est semblable à une portion de l'ensemble (Γ') des points M de l'espace appartenant au plan (Q) de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{E\varphi(M)}$ soient orthogonaux, où E est le point de coordonnées $(5;1;2)$ et φ l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 2 \end{cases}$

11. Démontre que φ n'est ni une réflexion ni un demi-tour.
12. Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$.
    a. Démontre que $S = t o \varphi$ est la réflexion d'un plan $(\mathcal{P})$ dont tu préciseras une équation cartésienne.
    b. Détermine une équation cartésienne de l'image par S du plan $(\mathcal{H})$ d'équation cartésienne $2x + 3y - z - 5 = 0$.
13. Démontre que (Γ') a pour équation $y^2 + 4xy + x^2 = 0$.
14. Soit $\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.
    a. Démontre que $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé de (Q).
    b. Détermine une équation de (Γ') dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
    c. Déduis-en que (Γ') est la réunion de deux droites sécantes dont tu donneras les équations dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.