MINESEC
COLLÈGE SACRE CŒUR
MOKOLO
Département de mathématiques
Année scolaire : 2025/2026

Évaluation $N^0 1$
Classe : Tle C
Durée : 3h30 Coef :7
Date : Octobre 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES — 15points

Exercice 1 : 03,75 points

1. On considère le nombre complexe $A = \dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$
   (a) Montrer que $A = -1 + i\sqrt{3}$. **0,25pt**
   (b) Déterminer A^2 ; et en déduire que $A^3 = 8$. **0,5pt**
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$. **0,5pt**
2. On considère l'équation (E_a) suivante : $(1-i)z^2 - 2(a+1)z + (1+i)(1+a^2) = 0$, avec a un complexe.
   (a) Vérifier que le discriminant Δ_a de l'équation (E_a) est : $\Delta_a = -4(a-1)^2$. **0,5pt**
   (b) Résoudre alors l'équation (E_a). **0,5pt**
   (c) On pose les deux nombres complexes $u = a + i$ et $v = 1 + ai$
      i. Montrer que $\dfrac{u}{v} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |a| = 1$. **0,5pt**
      ii. Montrer que si $|a| = 1$ et $a^2 + a(2i-1) - 1 \neq 0$ alors $\dfrac{u^2}{a} \in i\mathbb{R}$. **0,5pt**
      iii. Montrer qu'il existe un unique complexe w tel que $\dfrac{u^2 - w}{a - w} = i$ et $w \neq 0$. **0,5pt**

Exercice 2 : 04,25 points

1. On considère les nombres A et B tels que $A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$, $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $10^3 - 1 = 9 \times 11$; et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$. **0,25pt**
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A est divisible par 11. **0,5pt**
   (c) Montrer que si n est impair alors A est divisible par 7 et par 13. **0,5pt**
   (d) Montrer que si n est impair, alors B est divisible par $7, 11, 13$. **0,75pt**
2. Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que : $\overline{45}^b + \overline{36}^b = \overline{103}^b$.
   (a) Déterminer l'entier naturel b. **0,5pt**
   (b) Effectuer l'opération $\overline{45}^b \times \overline{36}^b$. **0,25pt**
3. Soit n un entier naturel.On désigne par $a; b$ et c 3 entiers naturels impairs. On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ et que le produit de deux entiers consécutifs est pair.
   (a) Montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$. **0,5pt**
   (b) Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$. **0,25pt**
   (c) Montrer que $2(ab + ac + bc) \equiv 6[8]$ **0,25pt**
   (d) En déduis que $a^2 + b^2 + c^2$ et $2(ab + ac + bc)$ ne sont pas des carrés parfaits. **0,5pt**

Exercice 3 : 04 points

1. Démontrer que la somme des cubes de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 9.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que la fraction $\dfrac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif. **0,75pt**
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11. **0,5pt**
4. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $5^{2n} + 5^n$ soit divisible par 13. **0,5pt**
   (a) Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne par 3 de $A = 2n^3 - n^2 + 2$.
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[7]$ **0,5pt**
6. Déterminer l'entier naturel n tel que $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[3]$. **0,5pt**

Exercice 4 : 03 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$
On considère l'expression $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2+4i)z - 12i$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2. Déterminer les racines de $\delta = 12 - 16i$. **0,5pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2-4i)z - 6 = 0$. **0,5pt**
4. Déterminer le polynôme Q de degré 2 tel que $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. **0,75pt**
5. En-Déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ **0,5pt**

<u>PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES</u> 05points

Sur un site de vente de terrains titrés de forme rectangulaire, plusieurs lots sont disponibles et les dimensions (longueur et diagonale) de chaque lot vérifient le système : $\begin{cases} ab - b^2 = 2028, \\ pgcd(a,b) = 13 \end{cases}$ avec la longueur qui est plus grande que 100 m. Le mètre carré de ce terrain coûte 10000 $\mathbf{Frs}$. M. Ebah dispose d'un montant de 28393000 $\mathbf{Frs}$ pour l'achat d'un bon lot, mais doute de pouvoir encore en trouver sur place.

M. Ebah appelle son fils William et lui demande de retirer de l'argent dans son coffre-fort et de venir le lui remettre. William, dans la précipitation, oublie de prendre le code du coffre-fort. Afin de pouvoir retrouver facilement le mot de passe de son coffre-fort lorsqu'il l'a oublié, M. Ebah a gravé sur ce coffre-fort la phrase suivante : *le code de mon coffre-fort est un entier naturel constitué de 3 chiffres tels que son écriture en base sept est de la forme $\overline{xyz}$ et son écriture en base 11 est de la forme $\overline{zyx}$ avec y qui est un multiple de* 6 *strictement supérieur à* 3.

M. Ebah possède aussi un autre terrain dans la périphérie qu'il aimerait protéger par une clôture en fils de fer barbelés vendu par rouleau de 8 mètres à 750 $\mathbf{Frs}$ et creuser un puits au centre de ce terrain. Le terrain est formé de l'ensemble de points $M(x;y)$ avec $z = x + iy$ vérifiant $\left|4z + 4 - 4i\sqrt{3}\right| = \left|8 - 8i\sqrt{3}\right|$.

Tâches :

1. Le montant dont dispose M. Ebah sera-t-il suffisant pour l'achat d'un bon lot ? **1,5 pt**
2. Accompagner William pour retrouver le code du coffre-fort. **1,5 pt**
3. Déterminer les coordonnées du centre du puits et la somme totale qu'il faut pour clôturer son autre terrain. **1,5 pt**

Présentation générale : **0,5pt**