	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES **TRIM I – MINI COMPOSITION N01– DURÉE : 3H30 – COEF : 7** **DATE : 08/10/2025 ANNÉE SCOLAIRE : 2025/2026**	Classe: Tle C
	COMPÉTENCE : Utilisation PCGD : système du numération et les nombres complexes approches algébriques	
Appréciations de la production - Expert (A⁺) [18-20] - Acquis (A) [15-17] - En cours d'acquisition (EA) [11-14] - Non acquis (NA) [0-10]		**Notée /20**

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES **15points**

Exercice 1 : 04 points (les questions A et B sont indépendantes)

A-1 Soit l'assertion suivante : $(\mathcal{E})$: $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = 2$.

a) Donner la négation de cette assertion. **0,5pt**

b) Donner la valeur de vérité de cette négation. **0,25pt**

2- Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; $x + y + z = 0 \Longleftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. **0,5pt**

3- On donne les propositions suivantes :

(P) : $2x + 4y + 1$ et (Q) : $\dfrac{1}{x^2 + y^2} \leq 20$. Montrer que $(P) \Longrightarrow (Q)$. **0,5pt**

B- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad f(x + y) + x + y = (f(x) + x)(f(y) + y)$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

1. Justifier que $f(0) = 1$. **0,5pt**
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x) + x)^n - nx$. **0,5pt**
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $f(n)$ en fonction de n. **0,25pt**
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = \dfrac{1}{f(n) + n} + n$. **0,5pt**
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ en fonction de n. **0,5pt**

Exercice 2 : 03,75 points (les questions A , B et C sont indépendantes)

A-1- Soit p un nombre premier. Résoudre dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$. **0,75pt**

B- Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(a^n, b^n) = 1$. **0,25pt**
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Montrer que $\Delta(a^n, b^n) = (\Delta(a, b))^n$. **0,25pt**

C- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un *rep-unit* noté N_n est un entier naturel qui s'écrit à l'aide de n chiffres 1, c'est-à-dire :
$N_n = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ chiffres } 1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$

1. Les rep-units N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 sont-ils premiers ? **0,75pt**
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $9N_n = 10^n - 1$. **0,5pt**
3. Montrer que si n est divisible par 3 alors N_n est composé. **0,5pt**
4. (a) Prouver que si n est composé, il en est de même de N_n. **0,25pt**
   (b) En déduire une condition nécessaire pour que N_n soit premier. **0,25pt**
   (c) Cette condition est-elle suffisante ? **0,25pt**

Exercice 3 : 03 points

1. On donne l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Résoudre l'équation (E). **0,5pt**

2. Soit N un nombre naturel tel que $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

   (a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E). **0,25pt**

   (b) Quel est le reste dans la division de N par 40 ? **0,75pt**

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 5y = 100$. **0,5pt**

   (b) Au 10e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ? **1pt**

Exercice 4 : 04,25 points

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Prouver que $|a-b| = |1-\overline{a}b| \iff |a| = 1$ ou $|b| = 1$. **0,5pt**
2. On considère le nombre complexe $z = \dfrac{5+3i\sqrt{5}}{1-2i\sqrt{3}}$.

   (a) Montrer que $z = -1 + i\sqrt{3}$. **0,25pt**

   (b) Déterminer z^2 et en déduire que $z^3 = 8$. **0,5pt**

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$. **0,5pt**
3. On considère l'équation (E_α) suivante : $(1-i)z^2 - 2(\alpha+1)z + (1+i)(1+\alpha^2) = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$.

   (a) Vérifier que le discriminant Δ_α de l'équation (E_α) est $\Delta_\alpha = -4(\alpha-1)^2$. **0,5pt**

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α). **0,5pt**

   (c) On pose les deux nombres complexes $u = \alpha + i$ et $v = 1 + \alpha i$.

   i. Montrer que $\dfrac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff |\alpha| = 1$. **0,5pt**

   ii. Montrer que si $|\alpha| = 1$ et $\alpha^2 + \alpha(2i-1) - 1 \neq 0$ alors $\dfrac{v^2}{\alpha} \in i\mathbb{R}$. **0,5pt**

   iii. Montrer qu'il existe un unique complexe w tel que $\dfrac{u^2 - w}{\alpha - w} = i \quad$ et $\quad w \neq 0$. **0,5pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES **05points**

Sur un site de vente de terrains titrés de forme rectangulaire, plusieurs lots sont disponibles et les dimensions (longueur et diagonale) de chaque lot vérifient le système : $\begin{cases} ab - b^2 = 2028, \\ pgcd(a,b) = 13 \end{cases}$ avec la longueur qui est plus grande que 100 m. Le mètre carré de ce terrain coûte 10000 F r s. M. NKOLO dispose d'un montant de 28393000 F r s pour l'achat d'un bon lot, mais doute de pouvoir encore en trouver sur place.

M. NKOLO appelle son fils Fresnel et lui demande de retirer de l'argent dans son coffre-fort et de venir le lui remettre. Fresnel, dans la précipitation, oublie de prendre le code du coffre-fort. Afin de pouvoir retrouver facilement le mot de passe de son coffre-fort lorsqu'il l'a oublié, M. NKOLO a gravé sur ce coffre-fort la phrase suivante : *le code de mon coffre-fort est un entier naturel constitué de 3 chiffres tels que son écriture en base sept est de la forme $\overline{xyz}$ et son écriture en base 11 est de la forme $\overline{zyx}$ avec y qui est un multiple de* 6 *strictement supérieur à* 3.

M. NKOLO possède aussi un autre terrain dans la périphérie qu'il aimerait protéger par une clôture en fils de fer barbelés vendu par rouleau de 8 mètres à 750 F r s et creuser un puits au centre de ce terrain. Le terrain est formé de l'ensemble de points $M(x;y)$ avec $z = x + iy$ vérifiant $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |8 - 8i\sqrt{3}|$.

Tâches :

1. Le montant dont dispose M. NKOLO sera-t-il suffisant pour l'achat d'un bon lot ? **1,5 pt**
2. Accompagner Fresnel pour retrouver le code du coffre-fort. **1,5 pt**
3. Déterminer les coordonnées du centre du puits et la somme totale qu'il faut pour clôturer son autre terrain. **1,5 pt**